

第 1 回 基本的な関数の微分法

1.1. 文字について 次の文字の書きわけには特に注意しよう (実際に注意して書こう)

 x (エックス) と χ (カイ)

x	χ	x	χ	x	χ

 a (エー) と α (アルファ)

a	α	a	α	a	α

 u (u: U の小文字) と v (v: V の小文字)

u	v	u	v	u	v

 y と g

y	g	y	g	y	g

 b と 6

b	6	b	6	b	6

 r (アール) と γ (ガンマ)

r	γ	r	γ	r	γ

1.2. 極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ というのは「 x が a に近づくとき, $f(x)$ が b に限りなく近づく」という意味だが, 近づくということをちゃんと考えて数式で表すと

どんな $\varepsilon > 0$ に対しても次が成立する $\delta(\varepsilon) > 0$ がある: $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

$f(x)$ が b に十分近くなるには, x が a に近くにならないといけない, を数式で表したものとなる.

また, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ というのは数式で表わせば,

どんな $\varepsilon > 0$ に対しても次が成立する $M(\varepsilon) > 0$ がある: $x \geq M(\varepsilon) > 0 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

なお, $x > a$ に限定して考える場合 ($x > a$ のまま $x \rightarrow a$ と近づく) は $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ や $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ と表し, これを右極限という. また, $x < a$ に限定して考える場合 ($x < a$ のまま $x \rightarrow a$ と近づく) は $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ や $\lim_{x \uparrow a} f(x)$ と表し, これを左極限という. 右極限と左極限が一致したときに限り, 極限值が確定する.

極限值が確定する場合, 収束するという. 収束しない場合は発散するという. そのうち, いくらでも大きくなる

どんな $\delta > 0$ に対しても次が成立する $M(\delta) > 0$ がある: $0 < |x - a| < \delta \ \& \ f(x) \geq M(\delta)$.

のことを正の無限大に発散するといひ, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ と表す.

1.3. 多項式関数・べき乗 $f(x)$ が x の整式で表されるような関数を多項式関数という.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

指数法則など

$$\frac{1}{x^s} = x^{-s}, \quad \sqrt[n]{x^p} = x^{\frac{p}{n}}, \quad a^x a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

例 1.1. なお, $x^{\frac{m}{n}}$ を $x^{m/n}$ と書くことがある.

$$(1) \sqrt[12]{x^8} = x^{\frac{8}{12}} = x^{\frac{2}{3}}.$$

$$(2) \frac{\sqrt{x}}{x^5} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^5} = x^{\frac{1}{2}-5} = x^{-\frac{9}{2}}.$$

$$(3) \sqrt[3]{x^2} \sqrt{x} = x^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{6}}.$$

$$(4) (\sqrt[9]{x^2})^6 = (x^{\frac{2}{9}})^6 = x^{\frac{12}{9}} = x^{\frac{4}{3}}.$$

問 1.1. 次の式を x^a の形に直しなさい.

$$(1) \frac{(x^3)^4}{(x^5)^2}$$

$$(2) \frac{\sqrt[4]{x^9}}{\sqrt[6]{x^{16}}}$$

$$(3) \sqrt[4]{x^7} \sqrt[6]{x^{13}}$$

$$(4) \left(\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[4]{x^3}} \right)^5$$

1.4. 微分係数・導関数の定義 微分係数は極限值 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ のこと. 例えば, $f(x) = x^2$ のときは

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = a + a = 2a.$$

a から $f'(a)$ の新しい対応関係ができるが, これを導関数というのである. 従って (文字のことも考えて),

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

ところで, $f'(a)$ が確定する (収束する) 場合, $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるという. このとき,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left([f(x) - f(a)] + f(a) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + \lim_{x \rightarrow a} f(a) = f'(a) \times 0 + f(a) = f(a) \end{aligned}$$

がわかる. このように $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ となることを $f(x)$ は $x = a$ で連続であるという.

導関数を表す記号は $f'(x)$ の他に $\frac{df}{dx}(x)$ や $\dot{f}(x)$ などある. $y = f(x)$ と表されている場合には y' , $\frac{dy}{dx}$, $\dot{y}$ となる.

べき乗の導関数を求めてみよう. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ のように

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

これを用いれば, $f(x) = x^n$ の $x = a$ における微分係数は

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) = a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1} = na^{n-1}. \end{aligned}$$

また, $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ の $x = a$ での微分係数は,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{1/n} - a^{1/n}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{1/n} - a^{1/n}}{(x^{1/n})^n - (a^{1/n})^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{1/n} - a^{1/n}}{(x^{1/n} - a^{1/n})[(x^{1/n})^{n-1} + (x^{1/n})^{n-2}(a^{1/n}) + \cdots + (x^{1/n})(a^{1/n})^{n-2} + (a^{1/n})^{n-1}]} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x^{1/n})^{n-1} + (x^{1/n})^{n-2}(a^{1/n}) + \cdots + (x^{1/n})(a^{1/n})^{n-2} + (a^{1/n})^{n-1}} \\ &= \frac{1}{(a^{1/n})^{n-1} + (a^{1/n})^{n-2}(a^{1/n}) + \cdots + (a^{1/n})(a^{1/n})^{n-2} + (a^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{na^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}. \end{aligned}$$

このように, $(x^a)' = ax^{a-1}$ である. また, $[\alpha f(x) + \beta g(x)]' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$ も成立する.

例 1.2. $y = x^3 - 3x^2 - \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$ の導関数を求める.

$y = x^3 - 3x^2 - 6x^{-\frac{2}{3}}$ となるから,

$$y' = (x^3)' + (-3)(x^2)' - 6(x^{-\frac{2}{3}})' = 3x^2 + (-3) \times 2x - 6 \times \left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}\right) = 3x^2 - 6x + 4x^{-\frac{5}{3}}.$$

問 1.2. 次の関数の導関数を求めなさい.

(1) $y = 12x^6 + 9x^4 - 12x^3$

(2) $y = 8x\sqrt[4]{x^5}$

(3) $y = \frac{4}{3x^6}$

(4) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}}{x}$

三角関数: 加法定理を用いれば,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\cos h - 1}{h} \sin x + \frac{\sin h}{h} \cos x, \\ \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= -\frac{\sin h}{h} \sin x + \frac{\cos h - 1}{h} \cos x, \\ \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} &= \frac{\tan h}{h} \times \frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan x \tan h}.\end{aligned}$$

あとは、次の極限值が分かればよい.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \boxed{}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = \boxed{}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan h}{h} = \boxed{}.$$

指数関数: 指数法則に注意すれば

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

ここで、 $h = \log_a(1+t)$ とおけば、 $h \rightarrow 0$ は $\square$ と同じ。 t を用いて書き換えると、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{t \rightarrow \boxed{}} \boxed{} = \lim_{t \rightarrow \boxed{}} \boxed{}$$

対数関数: 対数関数の性質から

$$\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \frac{1}{x} \frac{x}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

ここで, $t = \frac{h}{x}$ とおけば, $h \rightarrow 0$ は $\boxed{\hspace{1cm}}$ と同じ. t を用いて書き換えると,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow \boxed{}} \boxed{} = \lim_{t \rightarrow \boxed{}} \boxed{}$$

あとは、対数関数の中にあるものの極限值が分かればよい。

$$\lim_{t \rightarrow \square} \square = \square \quad (\square \text{ という}).$$

1.6. 基本的な関数の導関数の公式 (1) では a は何でもよい. (5)(7) では $a > 0, a \neq 1$ とする.

(1) $(x^a)' =$

(2) $(\sin x)' =$

(3) $(\cos x)' =$

(4) $(\tan x)' =$

$$(5) \quad (a^x)' =$$

$$(6) \ (e^x)' =$$

$$(7) \quad (\log_a x)' =$$

$$(8) \quad (\log x)' =$$

注意 1.1. e^x のことを $\exp x$ と表記することがある.

注意 1.2. 対数の底が省略されている ($\log x$) 場合, 二進対数 ($\text{lb } x = \log_2 x$), 自然対数 ($\ln x = \log_e x$), 常用対数 ($\lg x = \log_{10} x$) のどれであることをあらかじめ確認すること. この演習では自然対数の場合 (底が e) に省略する. なお, $\ln x$ と書いても差し支えない. ちなみに関数電卓で $\ln$ と $\log$ がある場合には $\ln$ は底が e の対数, $\log$ は底が 10 の対数になっている.

問 1.3. 次の各問に答えなさい.

(1) $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示しなさい.

(2) $f(x) = |x|x$ は $x = 0$ で微分可能であることを示しなさい. また, 微分係数を求めなさい.