

第 2 回 積・商の微分／逆三角関数

2.1. 基本的な関数の導関数 前回紹介したものを実際に使ってみよう.

例 2.1. 次の導関数を求めなさい. (1) $y = 3 \sin x + 4 \cos x$. (2) $y = 3^x - x^3$.

$$(1) y' = 3(\sin x)' + 4(\cos x)' = 3(\cos x) + 4(-\sin x) = 3 \cos x - 4 \sin x.$$

$$(2) y' = (3^x)' - (x^3)' = 3^x \log 3 - 3x^2. \quad \text{第 1 項は指数関数・第 2 項はべき乗}$$

また, $y = f(ax + b)$ のとき $y' = a f'(ax + b)$ になる. 実際, $g(x) = f(ax + b)$ とすれば,

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0}$$

例 2.2. $y = 3 \sin 2x$ の導関数は $y' = 3 \times 2 \cos 2x = 6 \cos 2x$.

問 2.1. 次の関数の導関数を求めなさい.

$$(1) y = 6e^x \quad (2) y = 3 \log_2 x \quad (3) y = 5 \cos 4x \quad (4) y = \tan 2\pi x \quad (5) y = 4e^{3x} + 2e^{-3x}$$

2.2. 積の微分法・商の微分法

$y = f(x)g(x)$ の導関数は $y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

$y = \frac{f(x)}{g(x)}$ の導関数は $y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

例 2.3. 次の導関数を求めなさい. (1) $y = e^x \cos x$. (2) $y = \frac{x}{x^3 + 1}$.

$$(1) y' = (e^x)'(\cos x) + (e^x)(\cos x)' = (e^x)(\cos x) + (e^x)(-\sin x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x(\cos x - \sin x).$$

$$(2) y' = \frac{(x)'(x^3 + 1) - (x)(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2} = \frac{(1)(x^3 + 1) - (x)(3x^2)}{(x^3 + 1)^2} = \frac{x^3 + 1 - 3x^3}{(x^3 + 1)^2} = \frac{-2x^3 + 1}{(x^3 + 1)^2}.$$

$y = x^3 \log x$ の導関数は

$$y' = (\quad) (\quad) \quad (\quad) (\quad) =$$

$y = \frac{e^x}{\sin x}$ の導関数は

$$y' = \frac{(\quad) (\quad) \quad (\quad) (\quad)}{(\quad)} =$$

問 2.2. 次の関数の導関数を求めなさい.

(1) $y = \frac{3x + 5}{x^2 + 2x + 4}$

(2) $y = x^7 \log x$

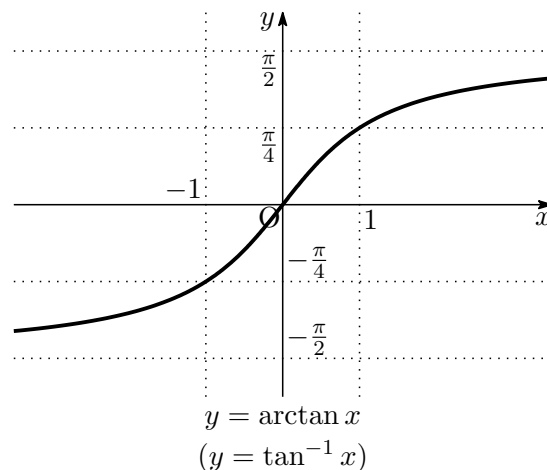
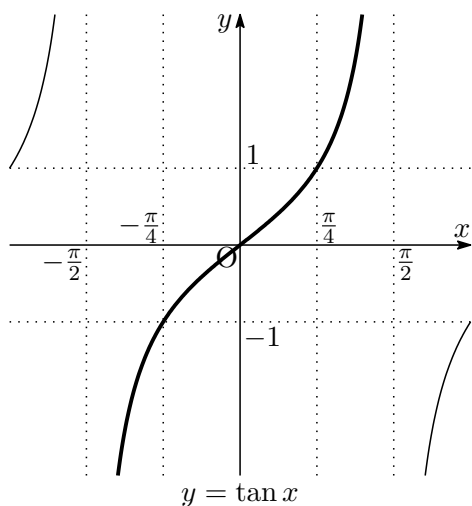
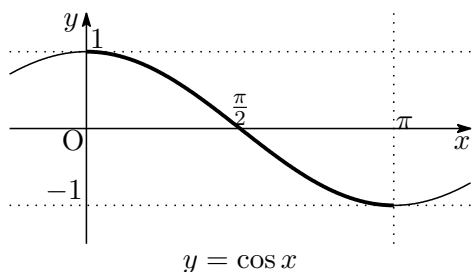
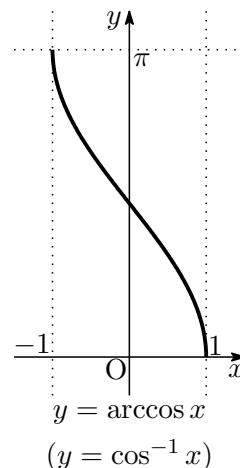
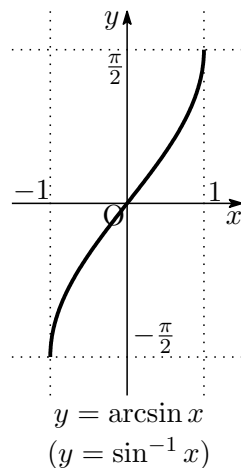
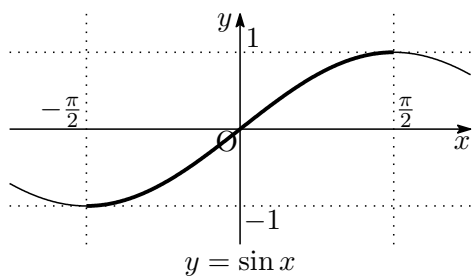
(3) $y = e^{-3x} \cos 4x$

(4) $y = \frac{x^4}{\log x}$

(5) $y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

(6) $y = x^3 e^{-x}$

2.3. 逆三角関数 $y = f(x)$ の逆関数を求めるには, x について解けばよい. それを三角関数でやろうとすると, 解が1つに定まらないので, 範囲をあらかじめ制限しておく必要がある.



• $y = \sin x$ は で単調増加で, 値の範囲は .

⇒ 逆関数 $\arcsin x$ は から への関数になる.

• $y = \cos x$ は で単調減少で, 値の範囲は .

⇒ 逆関数 $\arccos x$ は から への関数になる.

• $y = \tan x$ は で単調増加で, 値の範囲は .

⇒ 逆関数 $\arctan x$ は から への関数になる.

以下の表を完成させて理解しよう. ただし, $\arctan(\pm\infty)$ は $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan x$ を意味する.

	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$ ($\sin^{-1} x$)									
$\arccos x$ ($\cos^{-1} x$)									

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\arctan x$ ($\tan^{-1} x$)									

関数電卓やプログラミング言語では $\arcsin$ のことを asin と用いている場合もある.

注意 2.1. $\sin(\arcsin x) = x$ は問題ないが, $\arcsin(\sin x) = x$ とは限らない. これが成立するのは $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のみである. 同様に, $\cos(\arccos x) = x$, $\tan(\arctan x) = x$ は問題なく成立するが, $\arccos(\cos x) = x$ は $0 \leq x \leq \pi$ のときのみ, $\arctan(\tan x) = x$ は $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ のときのみ, である.

例 2.4. $2 \arctan(\sqrt{2} - 1)$ を求める.

$\theta = \arctan(\sqrt{2} - 1)$ とおくと, $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ だから $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$.

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{1 - (\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{1 - (3 - 2\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{2} - 2} = 1.$$

$0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$ で $\tan 2\theta = 1$ となるのは $2\theta = \frac{\pi}{4}$.

問 2.3. 次の値を求めなさい.

$$(1) 5 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (2) 7 \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \arccos \left(-\frac{1}{2} \right). \quad (3) 5 \arctan 1 + 7 \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}.$$