第 3 回　合成関数の微分

3.1. 合成関数の微分法　缶詰の法則・マトリョーシカの法則とも言われる: $\boxed{[F(g(x))]' = F'(g(x))\,g'(x)}$

例 3.1.

(1) $y = \sqrt{(3+2\cos x)^5} \Rightarrow y = (3+2\cos x)^{\frac{5}{2}}$.　$y = u^{\frac{5}{2}}$, $u = 3 + 2\cos x$.　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \dfrac{5}{2}u^{\frac{5}{2}-1}$, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2\sin x$.

$$\Rightarrow y' = \frac{5}{2}(3+2\cos x)^{\frac{5}{2}-1}(3+2\cos x)' = \frac{5}{2}(3+2\cos x)^{\frac{5}{2}-1}(-2\sin x) = -5\sin x(3+2\cos x)^{\frac{3}{2}}.$$

(2) $y = \log(x^2 - 3x + 5)$.　$y = \log u$, $u = x^2 - 3x + 5$.　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{u}$, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x - 3$.

$$\Rightarrow y' = \frac{(x^2-3x+5)'}{x^2-3x+5} = \frac{2x-3}{x^2-3x+5}.$$

(1) $y = e^{4x^3}$.　$y =$ 　　　　, $u =$ 　　　　.　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} =$ 　　　　, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} =$ 　　　　.

$y' = (\qquad\qquad)(\qquad\qquad) =$

(2) $y = \cos(\log x)$.　$y =$ 　　　　, $u =$ 　　　　.　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} =$ 　　　　, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} =$ 　　　　.

$y' = (\qquad\qquad)(\qquad\qquad) =$

問 3.1. 次の関数の導関数を求めなさい.

(1) $y = \sqrt[3]{8 - 6x - x^3}$　(2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{(2e^x+3)^5}}$　(3) $y = \log(5 + 4\sin x)$　(4) $y = e^{-4x^3}$

例 3.2. $y = x^2 e^{x^3}$ の導関数を計算する．積の微分法と合成関数の微分法から

$$y' = [x^2]' e^{x^3} + x^2 [e^{x^3}]' = 2x\, e^{x^3} + x^2\, e^{x^3}\, (x^3)' = 2x e^{x^3} + x^2 e^{x^3} 3x^2 = (2x + 3x^4) e^{x^3} = x(2 + 3x^3) e^{x^3}.$$

(1) $y = x^3 e^{-x^2}$.

$$y' = (\qquad\qquad)(\qquad\qquad) + (\qquad\qquad)(\qquad\qquad)$$

$$= (\qquad\qquad)(\qquad\qquad) + (\qquad\qquad)(\qquad\qquad)(\qquad\qquad)$$

$$=$$

(2) $y = e^{3x^2} \sin 5x^2$.

$$y' = (\qquad\qquad)(\qquad\qquad) + (\qquad\qquad)(\qquad\qquad)$$

$$= (\qquad\qquad)(\qquad\qquad)(\qquad\qquad) + (\qquad\qquad)(\qquad\qquad)(\qquad\qquad)$$

$$=$$

問 3.2. 次の関数の導関数を求めなさい．

(1) $y = x^3 \cos(4 \log x)$ (2) $y = \dfrac{e^{-x^2}}{x^2 + 3}$ (3) $y = \sin^5 x \cos^4 x$

3.2. 対数微分法　$y=f(x)^{g(x)}$ の形の場合, y' を計算するのに, $(\log y)'$ を考える方法である.

例 **3.3.** $y=x^{\frac{1}{x}}$ の導関数を求める.

$$\log y=\log x^{\frac{1}{x}}=\frac{\log x}{x}.\quad \frac{y'}{y}=\left(\frac{\log x}{x}\right)'=\frac{1-\log x}{x^2}.\quad \therefore\ y'=\frac{1-\log x}{x^2}y=(1-\log x)x^{\frac{1}{x}-2}.$$

問 **3.3.** 対数微分法を利用して関数 $y=x^{\log x}$ の導関数を求めなさい.

3.3. 逆三角関数の導関数　まずは一般的な話をする．$g(x)$ を $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ とする．このとき，$f(g(x)) = x$．この両辺を x で微分すると $\boxed{\qquad\qquad} = 1$ である．これより $(f^{-1}(x))' = g'(x) = \boxed{\qquad\qquad}$．

- $f(x) = \sin x$ $[f^{-1}(x) = \arcsin x]$ のとき，$f'(x) = \boxed{\qquad\qquad}$ より，$(f^{-1}(x))' = (\arcsin x)' = \boxed{\qquad\qquad}$．

  $y = \arcsin x$ の値の範囲は $\boxed{\qquad\qquad}$ なので $\cos y \geqq 0$ である．よって $\cos y = \boxed{\qquad\qquad}$．

  $\sin(\arcsin x) = x$ だったから，$(\arcsin x)' = \boxed{\qquad\qquad}$．

- $f(x) = \cos x$ $[f^{-1}(x) = \arccos x]$ のとき，$f'(x) = \boxed{\qquad\qquad}$ より，$(f^{-1}(x))' = (\arccos x)' = \boxed{\qquad\qquad}$．

  $y = \arccos x$ の値の範囲は $\boxed{\qquad\qquad}$ なので $\sin y \geqq 0$ である．よって $\sin y = \boxed{\qquad\qquad}$．

  $\cos(\arccos x) = x$ だったから，$(\arccos x)' = \boxed{\qquad\qquad}$．

- $f(x) = \tan x$ $[f^{-1}(x) = \arctan x]$ のとき，$f'(x) = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$．

  $\tan(\arctan x) = x$ だったから，$(\arctan x)' = \boxed{\qquad\qquad}$．

  従って，次の微分公式が完成する．

  $(\arcsin x)' = \boxed{\qquad\qquad}$　　$(\arccos x)' = \boxed{\qquad\qquad}$　　$(\arctan x)' = \boxed{\qquad\qquad}$

問 3.4. 次の関数の導関数を求めなさい．

(1) $y = 2\arcsin x - 3\arccos x$　　(2) $y = \arctan \dfrac{1}{x}$　　(3) $y = \tan(\arcsin x)$