

第 4 回 不定形の極限值

4.1. 不定形とは何か ここではまず $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ を考える. もし, 分母の極限値が $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0$ であれば

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{}. \text{ (基本ルール) } \text{ただし } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B.$$

ここでもし, $A = 0, B = 0$ であれば, 計算ができなくなってしまう. 実際, $f(x) = cx, g(x) = x$ であれば,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \boxed{}, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \boxed{}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{} = \boxed{}.$$

このように, どの値にもなり得るので不定形と呼ばれる. 不定形の場合, 詳しく計算をする必要がある.

4.2. ロピタルの定理 不定形の極限を計算するのに強力なツールだが, 使用可能な条件に注意したい.

ロピタルの定理

条件 1 $\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \right]$

or $\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \text{ (複号任意)} \right] \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

条件 2 $g'(x)$ が a の近くで 0 でない

条件 3 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が確定

★ 極限値は片側極限 (右極限・左極限) でもよい.

例 4.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$. まず, $x \rightarrow 0$ のとき, 分子 $x - \sin x \rightarrow 0$, 分母 $x^2 \rightarrow 0$ に注意する.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x}. \quad \dots \text{①}$$

分母 $2x$ は $x = 0$ の近くでは同時に 0 にならない. また $x \rightarrow 0$ のとき, 分子 $1 - \cos x \rightarrow 0$, 分母 $2x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2}. \quad \dots \text{②}$$

分母 2 は $x = 0$ の近くでは同時に 0 にならない. また $x \rightarrow 0$ のとき, 分子 $\sin x \rightarrow 0$, 分母 $2 \rightarrow 2$. 不定形ではなくなったので, ②の極限値は 0 である.

ロピタルの定理より, ①の極限値と②の極限値とは一致する. ゆえに①の極限値は 0 である.

再びロピタルの定理より, 問題の極限値と①の極限値とは一致する. ゆえに問題の極限値は 0 である.

本来はここまで説明を書かないとロピタルの定理は使えない. これを簡略化して書くと, 次のとおりである.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x - \sin x}{x^2}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{タリ}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1 - \cos x}{2x}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{タリ}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x}{2}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{タリ}}} = \frac{0}{2} = 0.$$

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{x \log x}$. $x \rightarrow 1$ のとき, 分子 $x^3 - 6x + 5 \rightarrow \boxed{}$, 分母 $x \log x \rightarrow \boxed{}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 6x + 5)'}{(x \log x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\boxed{}}{\boxed{}}. \quad \dots \text{①} \quad \star (x \log x)' =$$

分母 $\boxed{}$ は $x = \boxed{}$ の近くでは $\boxed{}$.

$x \rightarrow 1$ のとき, 分子 $\boxed{}$, 分母 $\boxed{}$ なので①の極限値は $\boxed{}$.

$\boxed{}$ より ①の極限値と元の極限値が一致するので, 求めたい極限値は $\boxed{}$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x) - 2x}{e^{3x} - 1 - 3x}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\log(1+2x) - 2x}^{\rightarrow \square}}{\underbrace{e^{3x} - 1 - 3x}_{\rightarrow \square}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\log(1+2x) - 2x]'}{(e^{3x} - 1 - 3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\square}^{\rightarrow \square}}{\underbrace{\square}_{\rightarrow \square}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\square)'}{(\square)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\square}^{\rightarrow \square}}{\underbrace{\square}_{\rightarrow \square}} = \frac{\square}{\square} = \square. \end{aligned}$$

例 4.2. ロピタルの定理は ∞ の場合にも使える.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\log(2^x + 1)}^{\rightarrow +\infty}}{\underbrace{x}_{\rightarrow +\infty}} &= \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ \text{ロピタル}}} \frac{(\log(2^x + 1))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^x \log 2}{2^x + 1}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{2^x \log 2}^{\rightarrow +\infty}}{\underbrace{2^x + 1}_{\rightarrow +\infty}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ \text{ロピタル}}} \frac{(2^x \log 2)'}{(2^x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x (\log 2)^2}{2^x \log 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log 2 = \log 2. \end{aligned}$$

不定形であっても、ロピタルの定理を使えば絶対計算できるということまではいえない.

例 4.3.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{x+1} + 2^x}{3^x - 2^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3^{x+1} + 2^x) \div 3^x}{(3^x - 2^{x+1}) \div 3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2^x}{3^x}}{1 - 2 \frac{2^x}{3^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + (\frac{2}{3})^x}{1 - 2(\frac{2}{3})^x} = \frac{3 + 0}{1 - 2 \times 0} = \frac{3}{1}.$$

★
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(2^x + 3^x)}{3x + 2}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\log(2^x + 3^x)}^{\rightarrow \square}}{\underbrace{3x + 2}_{\rightarrow \square}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\log(2^x + 3^x)]'}{(3x + 2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\square}{\square} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\square}{\square} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\square) \div \square}{(\square) \div \square} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\square}^{\rightarrow \square}}{\underbrace{\square}_{\rightarrow \square}} = \frac{\square}{\square} = \square. \end{aligned}$$

問 4.1. 次の極限值を求めなさい.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(5x-4)}{x^2-1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{2x^3-3x^2+1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x - 2x}{2x^2 + 5x^3}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{3^x}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5e^{2x} + x}{e^{2x} + 3x^2}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^3+1)}{\log(x+1)}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{x+2} - 4^{x+1}}{3^x + 4^x}$$

4.3. その他のタイプの不定形

- 0∞ タイプの不定形は $f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ のような変形をして考えるとよい.

例 4.4.

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0.$$

- $0^0, 1^\infty, \infty^0$ タイプの不定形は $f(x)^{g(x)}$ の極限値の計算の前に $\log f(x)^{g(x)} = g(x) \log f(x)$ の極限値を考えて, その値 c を用いて e^c が求めるものになる.

例 4.5. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2^x + 3^x)^{\frac{1}{3x+2}}.$ $\log(2^x + 3^x)^{\frac{1}{3x+2}} = \frac{\log(2^x + 3^x)}{3x+2}$ である.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(2^x + 3^x)}{3x+2} = \frac{\log 3}{3}$ なので (先ほどやった), 求める極限値は $e^{\frac{\log 3}{3}} = 3^{\frac{1}{3}}.$