第 5 回　高次導関数

5.1. 高階導関数　$y = f(x)$ を n 回微分したものを n 階導関数 (n 次導関数) といい, $y^{(n)}$, $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$, $f^{(n)}(x)$ などと表す. なお, n が小さければ y'' や $f'''(x)$ などと書いてもよいが, 多くなると数えるのが大変.

注意 5.1. 習慣的に $f^{(0)}(x) = f(x)$ とする. また, $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ を $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n y$ とも表す.

例 5.1. $y = x^2 \sin x$ の 3 階導関数を求める.

$$y' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$
$$y'' = [2\sin x + 2x\cos x] + [2x\cos x + x^2(-\sin x)] = (2 - x^2)\sin x + 4x\cos x.$$
$$y''' = [-2x\sin x + (2 - x^2)\cos x] + [4\cos x + 4x(-\sin x)] = (6 - x^2)\cos x - 6x\sin x.$$

例 5.2. $y = e^{ax}$ の n 階導関数を考える.

$$y' = e^{ax}(ax)' = ae^{ax}, \qquad y'' = a \times e^{ax}(ax)' = a^2 e^{ax}, \qquad y''' = a^2 \times e^{ax}(ax)' = a^3 e^{ax}.$$

よって $y^{(n)} = a^n e^{ax}$ と予想できる. 実際にはこの予想が正しいことを数学的帰納法を用いて示す必要がある.

問 5.1. $y = \sin ax$ の $2n$ 階導関数と $(2n + 1)$ 階導関数を求めなさい.

問 5.2. 次の関数の 2 階導関数を求めなさい.　(1) $y = e^{2x^3}$.　(2) $y = \log(x^2 + 1)$.

問 5.3. 次の関数の 3 階導関数を求めなさい.

(1) $y = \sqrt{3x+1}$ (2) $y = x^3 \log x$ (3) $y = e^{3x} \cos 2x$

5.2. ライプニッツの公式　積の微分法を一般化したものである.

微分 0 回　$f(x)g(x)$ □個

微分 1 回　$f'(x)g(x)$ □個　$f(x)g'(x)$ □個

微分 2 回　$f''(x)g(x)$ □個　$f'(x)g'(x)$ □個　$f(x)g''(x)$ □個

微分 3 回　$f'''(x)g(x)$ □個　$f''(x)g'(x)$ □個　$f'(x)g''(x)$ □個　$f(x)g'''(x)$ □個

微分 4 回　$f''''(x)g(x)$ □個　$f'''(x)g'(x)$ □個　$f''(x)g''(x)$ □個　$f'(x)g'''(x)$ □個　$f(x)g''''(x)$ □個

微分 5 回　$f^{(5)}(x)g(x)$ □個　$f''''(x)g'(x)$ □個　$f'''(x)g''(x)$ □個　$f''(x)g'''(x)$ □個　$f'(x)g''''(x)$ □個　$f(x)g^{(5)}(x)$ □個

ライプニッツ (Leibniz) の公式

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x) = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r f^{(r)}(x)g^{(n-r)}(x)$$

$$= f^{(n)}(x)g(x) + n\,f^{(n-1)}(x)g'(x) + \frac{n(n-1)}{2}f^{(n-2)}(x)g''(x) + \cdots + f(x)g^{(n)}(x).$$

例 5.3. $y = x^2e^x$ の n 階導関数を求める.　$f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$ とみてライプニッツの公式を使う.
$(x^2)' = 2x$, $(x^2)'' = 2$, $(x^2)^{(r)} = 0$ $(r \geqq 3)$, $(e^x)^{(r)} = e^x (r \geqq 0)$ なので,

$${}_n\mathrm{C}_0(x^2)(e^x)^{(n)} + {}_n\mathrm{C}_1(x^2)'(e^x)^{(n-1)} + {}_n\mathrm{C}_2(x^2)''(e^x)^{(n-2)}$$

$$= x^2e^x + n \times 2xe^x + \frac{n(n-1)}{2} \times 2e^x = e^x\{x^2 + 2nx + n(n-1)\}.$$

問 5.4. ライプニッツの公式を用いて, $y = x^3e^{2x}$ の n 階導関数を求めなさい.

5.3. 平均値の定理　平均値の定理は「存在する」ことまでしかいっていない定理だが, とても有用である.

> $f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能とする. このとき, 次を満たす c が $a < c < b$ にある:
> $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad \bigstar\ f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a) \text{ とも書ける.}$$

これを更に一般化したものが**コーシーの平均値定理**である.

> $f(x)$, $g(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能とする. このとき, 次を満たす c が $a < c < b$ にある:
> $$[f(b) - f(a)]g'(c) = f'(c)\,[g(b) - g(a)].$$
> もし, $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 にならないならば,
> $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

これが前回取り上げたロピタルの定理の証明には必要不可欠である.

5.4. テイラーの定理　平均値の定理を一般化したものがテイラーの定理である.

> $f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で n 階微分可能とする. このとき, 次を満たす c が $a < c < b$ にある.
> $$f(b) = f(a) + f'(a)\,(b - a) + \frac{f''(a)}{2}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\boldsymbol{c})}{n!}(b - a)^n.$$

ちなみに, a と b の役割を逆にした場合も成立する.

テイラーの定理は, 具体的な数値が分からないような関数の値を求めるときに, 誤差を見積もりながら計算するために有用である.

$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$ の近似値を求める. テイラーの定理で $n = 4$, $a = 0$ とすれば,

$$e^b = \boxed{} + \boxed{}\,b + \boxed{}\,b^2 + \boxed{}\,b^3 + \boxed{}.$$

剰余項について, $2 < e < 3$ および $\sqrt{3} < 1.75$ であるから, $\boxed{} < \boxed{} < \boxed{}$.

ゆえに $\boxed{} < e^b < \boxed{}$. これを計算すれば, $1.6484 < \sqrt{e} < 1.6504$ がわかる.