

第 6 回 テイラー展開

6.1. テイラー展開・マクローリン展開

$f(x)$ が $x = a$ の近くで何度も微分可能であるとき,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + \cdots$$

をテイラー展開 ($a = 0$ のときマクローリン展開) という.

収束するための条件はここでは考えないことにする (剰余項 $R_n \rightarrow 0$ を示したり, 級数の収束半径を考える).

テイラーの定理で b を x に変えたものである. この展開が $=$ であることを示すには, 剰余項 R_n の扱いが必要となるが, 例えば,

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n, \quad \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)(c-a)^{n-1}, \quad \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} dt$$

など (それぞれ, ラグランジュの剰余項, コーシーの剰余項, ベルヌーイの剰余項という).

$n!$ で割る理由を別アプローチから説明する. 簡単のために $a = 0$ とする. まず,

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

と書けたとすると, $f(0) = c_0$. 微分すれば

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + \cdots + n c_n x^{n-1} + \cdots$$

だから $f'(0) = c_1$. さらに微分をすれば

$$f''(x) = 2c_2 + \cdots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \cdots$$

だから $f''(0) = 2c_2$. 計 n 回微分すれば

$$f^{(n)}(x) = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot c_n + (n+1)n \cdots 3 \cdot 2 \cdot c_{n+1} x + \cdots$$

だから $f^{(n)}(0) = c_n n!$ であり, $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ となる.

6.2. マクローリン展開 以下のように整理して計算するとよい.

例 6.1. $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ の 3 次までのマクローリン展開.

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(0) = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}$$

$$f''(0) = -\frac{2}{9}$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-\frac{8}{3}}$$

$$f'''(0) = \frac{10}{27}$$

従って,

$$1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{9}\right)x^2 + \frac{1}{6} \times \frac{10}{27}x^3 = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3.$$

$f(x) = \sqrt{1+x}$ の 3 次までのマクローリン展開

$$f(x) =$$

$$f(0) =$$

$$f'(x) =$$

$$f'(0) =$$

$$f''(x) =$$

$$f''(0) =$$

$$f'''(x) =$$

$$f'''(0) =$$

従って,

$$\boxed{} + \frac{1}{\boxed{}} \times \boxed{} x + \frac{1}{\boxed{}} \times \boxed{} x^2 + \frac{1}{\boxed{}} \times \boxed{} x^3 =$$

問 6.1. 次の関数の 3 次までのマクローリン展開を求めなさい (それ以降の項や剰余項は不要).

(1) $f(x) = e^{3x} + 2e^{-x}$

(2) $f(x) = (1-x)^{\frac{3}{4}}$

(3) $f(x) = -\log(1-3x)$

問 6.2. 次の関数の 3 次までのマクローリン展開を求めなさい (それ以降の項や剰余項は不要).

(1) $f(x) = 3 \sin x + 2x \cos x$

(2) $f(x) = e^{-x} \sin 3x$

(3) $f(x) = (x + 3)e^{2x} - 2 \log(1 + x)$

6.3. 応用: オイラーの等式 $e^x, \sin x, \cos x$ にテイラーの定理を $a = 0$ として適用し、剰余項を考えると、

$$\begin{aligned} R_n[e^x] &= \frac{e^c}{n!} x^n, \\ R_{2n}[\sin x] &= \frac{(-1)^n \sin c}{(2n)!} x^{2n}, & R_{2n+1}[\sin x] &= \frac{(-1)^n \cos c}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \\ R_{2n}[\cos x] &= \frac{(-1)^n \cos c}{(2n)!} x^{2n}, & R_{2n+1}[\cos x] &= \frac{(-1)^{n+1} \sin c}{(2n+1)!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M^n}{n!} = 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$. 従って、次の展開がすべての x で成立することがわかる.

$$\begin{aligned} e^x &= \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots \end{aligned}$$

これに複素数などを代入することができるので $i = \sqrt{-1}$ として $x = yi$ を代入すれば

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (\text{オイラーの等式})$$

が証明できる. もちろん無限次多項式 (整級数) が収束するのか, 微分や積分などの操作との順序交換や和の順番など無限だからこそ気にしないといけない点が多い.

ところで $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ および $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ とマクローリン展開できたとしよう. このとき $f'(x)$ および $f(x)g(x)$ のマクローリン展開はそれぞれ

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n, \quad f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{ただし } c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k}b_k = a_n b_0 + a_{n-1}b_1 + \cdots + a_0 b_n.$$

これを逆手に取れば $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ が $F'(x) = f(x)$ となるような関数 $F(x)$ のマクローリン展開になることもわかる. テキストにある $\arcsin x$ および $\arctan x$ のマクローリン展開もその応用例である.