基本的な微分法のまとめ

鈴木 敏行

神奈川大学

2020 年 4 月 6 日

このスライドは

- 微分そのものの定義と具体的な関数 (多項式やべき乗根) の微分
- 積や商の微分法
- 合成関数の微分法
- おまけ

を載せている. 各自で自習するように.

また, 例題や練習問題も載せた.

§1. 微分の定義と多項式やべき乗根の微分法

そもそも微分とは

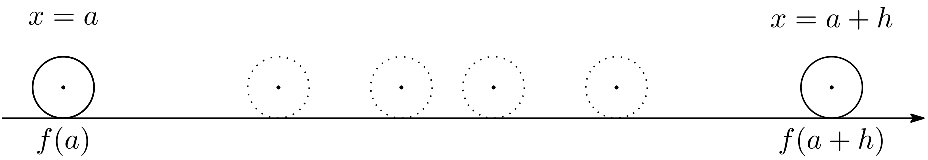
小学校で習った速さの公式は道のり $\div$ 時間であった.

でも, 直感的には速さは刻々と変化しているように感じる
(車は急に止まれない)

そこで, その時刻での瞬間の速さが必要になってくるのである.

x 秒における位置を $f(x)$ と表すと, a 秒から $a+h$ 秒の間の平均の速さは

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$



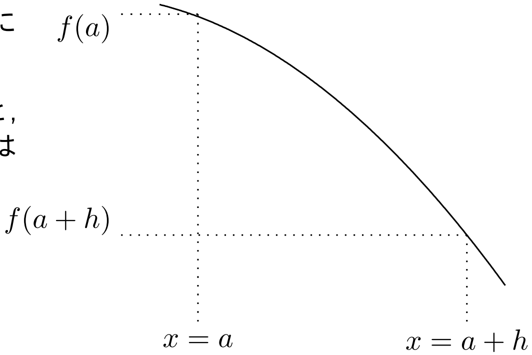
坂から物が転がるとき, 転がりやすさは坂の傾きが急な方が大きい.

でも, 坂道が常に同じ傾きであるわけではなく,
凸凹していたり急/なだらかだったりする.

その位置での傾き具合が必要になってくるのである.

x における高さを $f(x)$ と表すと,
a から $a+h$ の間の平均の傾きは

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$



a 秒における瞬間の速さも, a における傾き具合も

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

を計算することで得られる. これがまさに微分係数である.

微分係数を求めることを微分するといい,
微分係数が存在することを微分可能という.

a から微分係数 $f'(a)$ への新しい対応が関数となるが, これを導関数という.

導関数を求めることを微分するといい,
導関数が存在することを微分可能という.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

多項式の微分

まずは $f(x) = cx^n$ の導関数を求めてみよう ($n = 1, 2, \cdots$).

ところで, $S = x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}$ とすれば,

$$\begin{array}{rrcrl} & xS = & x^n & + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + & \\ -) & yS = & & x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + & y^n \\ \hline & (x-y)S = & x^n & & - y^n \end{array}$$

したがって,

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = S = x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}.$$

S には項が n 個あることに注意する.

これを用いると,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c(x+h)^n - cx^n}{(x+h)-x} \\
&= \lim_{h\to 0} c\frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h)-x} \\
&= \lim_{h\to 0} c[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}] \\
&= c[x^{n-1} + x^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}] = cnx^{n-1}.
\end{aligned}
$$

細かいことだが, $n=0$, つまり $f(x)=c$(定数関数) のときは,

$$
f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.
$$

$$
(cx^n)' = cnx^{n-1}. \ (n = 0, 1, 2, \cdots)
$$

ところで, 次の公式も成立する.

$$F(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \Rightarrow F'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

これは次のようにして示される.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha f(x+h) + \beta g(x+h) - \alpha f(x) - \beta g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha[f(x+h) - f(x)] + \beta[g(x+h) - g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \alpha \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \beta \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \alpha f'(x) + \beta g'(x).
\end{aligned}$$

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ の導関数

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 a_2 x + a_1.$$

$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 9x^2$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3(x^4)' - 8(x^3)' + 9(x^2)' = 3 \times 4x^3 - 8 \times 3x^2 + 9 \times 2x \\
&= 12x^3 - 24x^2 + 18x = 6x(2x^2 - 4x + 3).
\end{aligned}
$$

因数分解した方がいいのか，については，$f'(x) = 0$ となる x を知りたいという状況でないのであれば，無理して因数分解する必要はない．

ただし，因数分解した方がきれいになるのであれば，した方がいいのかもしれない．

因数分解は義務ではないので，無理ならしなくてもいいだろう．

べき乗根の微分

先ほどの $f(x) = cx^n$ の導関数を求める方法を応用して，
$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ の導関数を求めてみよう．

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+h}-\sqrt[n]{x}}{(x+h)-x} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+h}-\sqrt[n]{x}}{(\sqrt[n]{x+h})^n-(\sqrt[n]{x})^n} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt[n]{x+h})^{n-1}+(\sqrt[n]{x+h})^{n-2}(\sqrt[n]{x})+\cdots+(\sqrt[n]{x})^{n-1}} \\
&= \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-2}(\sqrt[n]{x})+\cdots+(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} \\
&= \frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.
\end{aligned}$$

一般に次が成立する．

$$(x^a)' = ax^{a-1}.\ (a \text{ は実数})$$

例題

$f(x) = 4\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 4x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}}. \\
f'(x) &= 4(x^{\frac{1}{2}})' - 3(x^{\frac{1}{3}})' = 4 \times \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 3 \times \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \\
&= 2x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{2}{3}}.
\end{aligned}
$$

根号をつけた形 $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$ の形にわざわざ戻す必要はない.

練習問題

次の関数を微分しなさい (導関数を求めなさい).

(1) $f(x) = 3x^5 - 7x^3 + 12x$　　(2) $f(x) = x^3(9x^5 - 4x^3 + 6x)$

(3) $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt{x}$　　(4) $f(x) = 12x\sqrt{x} + 4x^2\sqrt{x}$

(1) $f'(x) = 15x^4 - 21x^2 + 12.$ (2) $f'(x) = 72x^7 - 24x^5 + 24x^3.$

(3) $f'(x) = 2x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{2}}.$ (4) $f'(x) = 16x^{\frac{1}{2}} + 10x^{\frac{3}{2}}.$

因数分解をしなくてもよい.

§2. 積や商の微分法

今度は積や商の微分法を導く.
そのために, 微分可能性と連続性について注意しておこう.

$f(x)$ が $x = a$ で連続

$f(x)$ は $x = a$ で定義されており,

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x).$$

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能

次の極限値が存在する.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば $f(x)$ は $x=a$ で連続!!

$$f(x)=f(x)-f(a)+f(a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)+f(a).$$

ここで,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\times 0=0.$$

ゆえに,

$$\lim_{x\to a}f(x)=0+f(a)=f(a).$$

これは $f(x)$ が $x=a$ で連続であることを意味している.

積の微分法・商の微分法

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

(1) 積の微分法 [微分そのままそのまま微分]
$F(x) = f(x)g(x)$ とすれば,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

最後は次を使った.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \quad \lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$$ (微分可能ならば連続)

(2) 商の微分法

まず, $F(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ の導関数を求める.

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \frac{1}{g(x)g(x+h)} \\
&= -g'(x) \times \frac{1}{g(x)g(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}
$$

ここで, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$ なので, 積の微分法から,

$$
\begin{aligned}
\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' &= \{f(x)\}' \frac{1}{g(x)} + f(x) \left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \times -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}
$$

(1) $f(x) = (x^3 - x + 2)(3x^3 - 3x - 2)$

積の微分法より，

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 - x + 2)'(3x^3 - 3x - 2) + (x^3 - x + 2)(3x^3 - 3x - 2)' \\ &= (3x^2 - 1)(3x^3 - 3x - 2) + (x^3 - x + 2)(9x^2 - 3) \\ &= (3x^2 - 1)(3x^3 - 3x - 2) + (x^3 - x + 2)3(3x^2 - 1) \\ &= (3x^2 - 1)[(3x^3 - 3x - 2) + 3(x^3 - x + 2)] \\ &= (3x^2 - 1)(3x^3 - 3x - 2 + 3x^3 - 3x + 6) \\ &= (3x^2 - 1)(6x^3 - 6x + 4) = 2(3x^2 - 1)(3x^2 - 3x + 2). \end{aligned}$$

(2) $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^2-2x+5}$

商の微分法より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x-4)'(x^2-2x+5)-(3x-4)(x^2-2x+5)'}{(x^2-2x+5)^2} \\ &= \frac{(3)(x^2-2x+5)-(3x-4)(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2} \\ &= \frac{3x^2-6x+15-(6x^2-6x-8x+8)}{(x^2-2x+5)^2} \\ &= \frac{3x^2-6x+15-6x^2+6x+8x-8}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{-3x^2+8x+7}{(x^2-2x+5)^2}. \end{aligned}$$

分子は展開して整理した方がいいかもしれない.
分母はわざわざ展開する必要はない.

練習問題

次の関数を微分しなさい (導関数を求めなさい).

$$(1)\ f(x) = (x^4 - 2x^2 + 3)(x^4 - 2x^2 - 5)$$

$$(2)\ f(x) = \frac{4x - 7}{x^2 - 3x + 5} \qquad (3)\ f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 1}$$

練習問題の解答

$$(1)\ f'(x) = 8(x^3 - x)(x^4 - 2x^2 - 1)$$

$$(2)\ f'(x) = \frac{-4x^2 + 14x - 1}{(x^2 - 3x + 5)^2}$$

$$(3)\ f'(x) = \frac{-x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 2x + 5}{(x^3 - 3x + 1)^2}$$

因数分解は無理して行う必要はない.

§3. 合成関数の微分法

今度は合成関数の微分法を導く.
そのために, 微分可能性について注意しておこう.

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能の言いかえ

次を満たす $x=a$ で連続な関数 $f_1(x)$ が存在する.

$$f(x) = f(a) + f_1(x)(x-a).$$

なお, $f_1(a) = f'(a)$ である.

まず, 次に注意しよう.

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \quad x \neq a$$

もし, 微分可能であれば, $f_1(a) = f'(a)$ と定めれば,

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = f_1(a).$$

$x = a$ で連続となるような $f_1(x)$ が作れた.

一方, $x = a$ で連続となるような $f_1(x)$ があれば,

$$f_1(a) = \lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

右辺の極限値が存在するということだが, それは微分係数に他ならない.
したがって, $x = a$ で微分可能である.

※連続性について注意: 連続関数同士の合成関数は連続関数になっている.

合成関数の微分法

$$\{f(g(x))\}' = f'\bigl(g(x)\bigr)g'(x).$$

くれぐれも $f'(g'(x))$ や $f'(g(x))$ ではないので注意すること.

高校流に証明すると, $F(x) = f\bigl(g(x)\bigr)$ について

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\bigl(g(x+h)\bigr) - f\bigl(g(x)\bigr)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f\bigl(g(x+h)\bigr) - f\bigl(g(x)\bigr)}{g(x+h)-g(x)} \times \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'\bigl(g(x)\bigr)\,g'(x). \end{aligned}$$

実は, この証明法は問題点がある!
$g(x+h)-g(x)=0$ となってしまう可能性がある!!

では, どうすればよいのか: 割るのをやめればよい
(微分可能を言い換えたものは割り算を使っていない!)

$g(x)$ は $x=a$ で微分可能, $f(x)$ は $x=b=g(a)$ で微分可能とする.
次を満たすような $x=a$ で連続な関数 $g_1(x)$, $x=b$ で連続な関数 $f_1(x)$ が存在する.

$$g(x)=g(a)+g_1(x)(x-a), \quad f(x)=f(b)+f_1(x)(x-b).$$

このとき,

$$\begin{aligned} f\bigl(g(x)\bigr) &= f(b)+f_1\bigl(g(x)\bigr)\left(g(x)-b\right)=f\bigl(g(a)\bigr)+f_1\bigl(g(x)\bigr)\left(g(x)-g(a)\right) \\ &= f\bigl(g(a)\bigr)+f_1\bigl(g(x)\bigr)\left(g_1(x)(x-a)\right) \\ &= f\bigl(g(a)\bigr)+f_1\bigl(g(x)\bigr)\,g_1(x)\,(x-a). \end{aligned}$$

ここで, $g(x)\to g(a)=b$ ($x\to a$) であるから, $f_1\bigl(g(x)\bigr)g_1(x)$ は $x=a$ で連続である.
ゆえに, $f\bigl(g(x)\bigr)$ は $x=a$ で微分可能である. さらに, その微分係数は $f'\bigl(g(a)\bigr)g'(a)$.

例題

$y=f(g(x))$ を $y=f(u)$, $u=g(x)$ とみなすと,

$$\frac{dy}{dx}=\{f\bigl(g(x)\bigr)\}'=f'\bigl(g(x)\bigr)g'(x)=f'(u)g'(x)=\frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}.$$

$\dfrac{dA}{dB}$ というのは A を B という文字について微分する, と考えてよい.

合成関数の微分法はよく使うものなので, たくさん練習しよう.

(1) $f(x) = (x^3 + 3x^2 - 6x)^5$

$y = u^5$, $u = x^3 + 3x^2 - 6x$ だから,

$$\frac{dy}{du} = 5u^4, \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 + 6x - 6 = 3(x^2 + 2x - 2).$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 5u^4 \times 3(x^2 + 2x - 2) \\ &= 15(x^3 + 3x^2 - 6x)^4(x^2 + 2x - 2). \end{aligned}$$

(2) $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 5}$

$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$, $u = x^4 - 3x^2 + 5$ だから,

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad \frac{du}{dx} = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3).$$

$$f'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times 2x(2x^2 - 3) = \frac{x(2x^2 - 3)}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 5}}.$$

(3) $f(x) = x^3\sqrt{x^2-1}$

$y = \sqrt{x^2-1}$ について $y = u^{\frac{1}{2}}$, $u = x^2 - 1$ だから,

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{du}{dx} = 2x.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)'\sqrt{x^2-1} + x^3(\sqrt{x^2-1})' \quad \leftarrow \text{積の微分法} \\ &= 3x^2\sqrt{x^2-1} + x^3\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 3x^2\sqrt{x^2-1} + x^3\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\,2x \\ &= 3x^2\sqrt{x^2-1} + x^4\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

もし, もっと整理した形にしたければ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2\sqrt{x^2-1} + x^4\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3x^2(x^2-1)+x^4}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{4x^4-3x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2(4x^2-3)}{\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

練習問題

次の関数を微分しなさい (導関数を求めなさい).

(1) $f(x) = (2x^3 - 3x^2 - 6)^4$

(2) $f(x) = (x\sqrt{x} + 3x - 2)^5$

(3) $f(x) = \sqrt{-4x^2 + 6x + 5}$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(5) $f(x) = x^4(x^3 - 2)^5$

(6) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

練習問題の解答

(1) $f'(x) = 24x(x-1)(2x^3-3x^2-6)^3$

(2) $f'(x) = 5(x\sqrt{x}+3x-2)^4\left(\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+3\right)$

(3) $f'(x) = \dfrac{-4x+3}{\sqrt{-4x^2+6x+5}}$

(4) $f'(x) = -x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$

(5) $f'(x) = x^3(x^3-2)^4(19x^3-8)$

(6) $f'(x) = 4(x^2+4)^{-\frac{3}{2}}$

ここでは, これまで扱ってきた微分計算や公式に関連した話題を提供する.
実際に手を動かして計算して確かめてみよう.
また, 一般化もできるので, チャレンジしてみよう!

(おまけ) 積の微分法の別証明

$$f(x) = f(a) + f_1(x)(x-a), \quad g(x) = g(a) + g_1(x)(x-a),$$

となるような $x = a$ で連続な関数 $f_1(x)$, $g_1(x)$ がある.

$$\begin{aligned}
&f(x)g(x) \\
&= [f(a) + f_1(x)(x-a)][g(x) = g(a) + g_1(x)(x-a)] \\
&= f(a)g(a) + f_1(x)(x-a)g(a) + f(a)g_1(x)(x-a) \\
&+ f_1(x)(x-a)g_1(x)(x-a) \\
&= f(a)g(a) + [f_1(x)g(a) + f(a)g_1(x) + f_1(x)g_1(x)(x-a)](x-a).
\end{aligned}$$

$f_1(x)g(a) + f(a)g_1(x) + f_1(x)g_1(x)(x-a)$ は $x = a$ で連続だから,
これは $F(x) = f(x)g(x)$ が $x = a$ で微分可能であることを意味している.
さらに,

$$\begin{aligned}
F'(a) &= [f_1(x)g(a) + f(a)g_1(x) + f_1(x)g_1(x)(x-a)]_{x=a} \\
&= f_1(a)g(a) + f(a)g_1(a) + f_1(a)g_1(a)0 = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).
\end{aligned}$$

(おまけ) 無限級数の計算と微分

$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ とする.

等比数列の和の公式より $f(x) = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ $(x \neq 1)$ である.

$f'(x)$ を考えると,

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2} = \frac{nx^{n-1}(x-1) - (x^n - 1)}{(x-1)^2}.$$

それゆえに,

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

もし，$-1 < x < 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$，$\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$ だから，

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

一方，$-1 < x < 1$ のとき，

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

したがって，

$$x + 2x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-1} + nx^n + \cdots = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

では，$-1 < x < 1$ のとき，次の和はどう表されるのだろうか?

(1) $1 \times 2x + 2 \times 3x^2 + \cdots + (n-1)nx^{n-1} + n(n+1)x^n + \cdots$

(2) $1^2 x + 2^2 x^2 + \cdots + (n-1)^2 x^{n-1} + n^2 x^n + \cdots$