

三角関数の微分法のまとめ

鈴木 敏行

神奈川大学

2020 年 4 月 6 日

★ このスライドの転載や再配布などを禁止する.

このスライドは、次の微分公式を証明していくものである。

三角関数の微分公式

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

なお、後ろの方にいくつか微分計算の例題を掲載した。

微分公式を示すにあたって、以下の三角関数の性質は重要である。

基本公式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

加法定理

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \tan(x + y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.\end{aligned}$$

重要な極限值

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

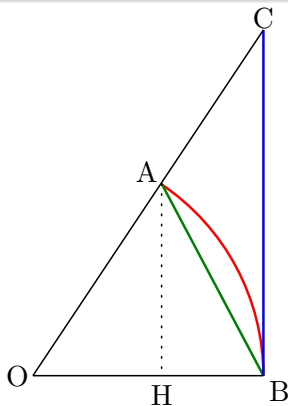
証明のために右のような図を考える.

$\angle AOB = \theta > 0$.

$OA = OB = 1$.

中心 O 半径 1 の円を描く.

B での接線と直線 OA の交点を C .



前ページの図において、図形の面積の大小関係を考えると

$$\text{三角形 OAB} < \text{扇形 OAB} < \text{三角形 OCB}$$

ところで、三角比の性質から、 $AH = \sin \theta$, $CB = \tan \theta$.

$$\text{三角形 OAB} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta,$$

$$\text{扇形 OAB} = \frac{1}{2} \times 1 \times (1\theta) = \frac{1}{2} \theta,$$

$$\text{三角形 OCB} = \frac{1}{2} \times 1 \times \tan \theta = \frac{1}{2} \tan \theta.$$

※扇型の面積は $\frac{1}{2} \times \text{半径} \times \text{弧の長さ}$ で計算できる.

なお、弧の長さは、円 1 周分が $2\pi \times \text{半径}$ であることと、円の中心角は 2π (度数法だと 360°) であることより $\text{半径} \times \text{中心角 (弧度法)}$ に注意する.

$$\text{ゆえに, } \frac{1}{2} \sin \theta < \frac{1}{2} \theta < \frac{1}{2} \tan \theta$$

これから, $\sin \theta < \theta < \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ なので

$$\frac{\sin \theta}{\theta} < 1 < \frac{\sin \theta}{\theta} \frac{1}{\cos \theta}. \quad \cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1.$$

さて, 最左辺 $\cos \theta$, 最右辺 1 について,

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \cos \theta = \cos 0 = 1, \quad \lim_{\theta \rightarrow +0} 1 = 1.$$

したがって, はさみうちの原理から, 中にある $\frac{\sin \theta}{\theta}$ の極限值がわかり,

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

ところで, $\theta \rightarrow -0$ の場合については, $-\theta \rightarrow +0$ であるので,

$$\lim_{\theta \rightarrow -0} \frac{\sin \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow -0} \frac{-\sin \theta}{-\theta} = \lim_{\theta \rightarrow -0} \frac{\sin(-\theta)}{(-\theta)} = \lim_{-\theta \rightarrow +0} \frac{\sin(-\theta)}{(-\theta)} = 1.$$

右極限と左極限が同じ 1 であるので, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$

なお,

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\theta(1 + \cos \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\theta(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta(1 + \cos \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \\ &= 1 \times \frac{0}{1 + 1} = 0.\end{aligned}$$

これで準備が整ったので、微分公式の証明を行うことにしよう.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = 0.$$

(1) $f(x) = \sin x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(x + \theta) - f(x)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \theta + \cos x \sin \theta - \sin x}{\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos \theta - 1) + \cos x \sin \theta}{\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(-\sin x \frac{1 - \cos \theta}{\theta} + \cos x \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \\ &= -\sin x \times 0 + \cos x \times 1 = \cos x. \end{aligned}$$

$$(2) f(x) = \cos x.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(x+\theta) - f(x)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos \theta - \sin x \sin \theta - \cos x}{\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos \theta - 1) - \sin x \sin \theta}{\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(-\cos x \frac{1 - \cos \theta}{\theta} - \sin x \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \\ &= -\cos x \times 0 - \sin x \times 1 = -\sin x. \end{aligned}$$

または,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \sin x \times 0 + \cos x \times 1 = \cos x$$

であり, 合成関数の微分法から,

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right]' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \times \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x \times 0 - \sin x \times 1 = -\sin x. \end{aligned}$$

(3) $f(x) = \tan x$. 商の微分法を用いると,

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} \\&= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

$\tan x$ の導関数は $\tan$ の加法定理から直接示すことができる.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(x+\theta) - f(x)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan x + \tan \theta}{1 - \tan x \tan \theta} - \tan x}{\theta} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan x + \tan \theta - \tan x(1 - \tan x \tan \theta)}{\theta(1 - \tan x \tan \theta)} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan x + \tan \theta - \tan x + \tan^2 x \tan \theta}{\theta(1 - \tan x \tan \theta)} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta(1 + \tan^2 x)}{\theta(1 - \tan x \tan \theta)} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} (1 + \tan^2 x) \frac{\tan \theta}{\theta} \frac{1}{(1 - \tan x \tan \theta)} \\
 &= (1 + \tan^2 x) \times 1 \times \frac{1}{1 - \tan x \times 0} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.
 \end{aligned}$$

ここで, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1$ に注意する.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{1}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \frac{1}{\cos \theta} = 1 \times \frac{1}{1} = 1.$$

$$(1) y = x^3 \sin x$$

積の微分法より

$$y' = (x^3)'(\sin x) + (x^3)(\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x.$$

$$(2) y = \frac{x^2}{\cos x}$$

商の微分法より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2)'(\cos x) - (x^2)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{2x \cos x - x^2(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

$$(3) \ y = \sin^5 x$$

合成関数の微分法より, $y = u^5$, $u = \sin x$ だから

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5u^4 \times \cos x = 5 \sin^4 x \cos x.$$

$$(4) \ y = \tan 3x^2$$

合成関数の微分法より, $y = \tan u$, $u = 3x^2$ だから

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u} \times 6x = \frac{6x}{\cos^2 3x^2}.$$

くれぐれも $\cos^2 3x^2$ を $\cos 3x^4$ や $\cos(3x^2)^2$ と勘違いしないように!

次の関数の導関数を求めなさい.

$$\begin{array}{lll} (1) y = x^4 \cos x & (2) y = \frac{\sin x}{x^3} & (3) y = \frac{\cos x}{2 + \sin x} \\ (4) y = 6 \cos 3x & (5) y = \sin 4x^3 & (6) y = \cos^7 x \\ (7) y = \tan(\sin x) & (8) y = \sin^2 x \cos^3 x & (9) y = \frac{\tan x}{\tan^2 x + 3} \end{array}$$

練習問題の解答 (答えのみ)

$$(1) y' = 4x^3 \cos x - x^4 \sin x. \quad (2) y' = \frac{x \cos x - 3 \sin x}{x^4}.$$

$$(3) y' = \frac{-1 - 2 \sin x}{(2 + \sin x)^2}. \quad (4) y' = -18 \sin 3x.$$

$$(5) y' = 12x^2 \cos 4x^3. \quad (6) y' = -7 \cos^6 x \sin x.$$

$$(7) y' = \frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}. \quad (8) y' = 2 \sin x \cos^4 x - 3 \sin^3 x \cos^2 x.$$

$$(9) y' = \frac{3 - \tan^2 x}{(\tan^2 x + 3)^2 \cos^2 x}.$$

(9) は $y = \frac{u}{u^2 + 3}$, $u = \tan x$ と考えて微分すると計算しやすい.