指数関数・対数関数の微分法のまとめ

鈴木 敏行

神奈川大学

2020 年 4 月 7 日

★ このスライドの転載や再配布などを禁止する.

このスライドは, 次の微分公式を証明していくものである.

指数関数・対数関数の微分公式

$$(a^x)' = a^x \log a, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x}.$$

ただし, $a > 0$, $a \neq 1$ であり,
$e = 2.718281828459045\cdots$ はネイピア数とする (ネイピア数については後で説明).

なお, 後ろの方にいくつか微分計算の例題を掲載した.

記号についての注意

対数 $\log_a b$ の底 a を省略して書くことがあるが...

- 二進対数 (binary logarithm: $\operatorname{lb} x = \log_2 x$),
- 自然対数 (natural logarithm: $\ln x = \log_e x$),
- 常用対数 (common logarithm: $\lg x = \log_{10} x$)

のどれであるかをあらかじめ確認すること.

微分積分では自然対数の場合 (底が e) に底を省略する.
なお, $\ln x$ と書いても差し支えない.

ちなみに関数電卓で $\ln$ と $\log$ がある場合には
$\ln$ は底が e の対数, $\log$ は底が 10 の対数になっている.

微分公式を示すにあたって, 以下の指数関数・対数関数の性質は重要である.

指数法則

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

対数法則

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy, \qquad \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y},$$

$$\log_a x^p = p \log_a x, \qquad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

重要な極限値

重要な極限値

$$\lim_{\theta \to 0}(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}} = e.$$

この証明は大変であるので, 気にしない人は飛ばしてくれて構わない.

指数関数の微分公式を導くところに飛ぶ!

ネイピア数の定義

n を正の整数としたとき, $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ を考える.

$a_n < a_{n+1}$ および $a_n < 3$ を示す.

2 項定理より

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + {}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{n}\right)^1 + {}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{n}\right)^r + \cdots \\
&= 1 + \frac{n}{1}\times\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\times\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}\times\frac{1}{n^r} + \cdots \\
&= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right) + \cdots .
\end{aligned}
$$

最後の式は項が n 個であり, n を $n+1$ にしたほうが各項は大きくなるし, 項が 1 個増えるので $a_n < a_{n+1}$ がいえた.

また, a_n を展開したものの第 2 項以降は $\dfrac{1}{r!}$ より小さく, $2^{r-1} < r!$ (これは数学的帰納法で示す) なので

$$a_n < 2 + \sum_{r=2}^{n} \frac{1}{r!} < 2 + \sum_{r=2}^{n} \frac{1}{2^{r-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2}[1 - (\frac{1}{2})^{n-1}]}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3.$$

$a_n < a_{n+1}$ と $a_n < 3$ という事実から数列 $\{a_n\}$ は収束する.

ある数以下に値をとる単調増加な数列は収束することがいえるので, それを e とおく.
(はさみうちの原理に近い)

2 と 3 の間にあるきれいに書けない数に収束するので, 円周率の π のようにとりあえず適当な文字を 1 つ設定する.
この e をネイピア数と呼ぶことにする.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (n: 自然数) から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (x: 実数) へ

正の実数 x に対して $n \leqq x < n+1$ となる正の整数 n を考えれば,
$1 + \dfrac{1}{n+1} < 1 + \dfrac{1}{x} \leqq 1 + \dfrac{1}{n}$ である.

ガウス記号 $[x]$ で書けばいいが, 国際的に標準的な記号ではない. $\lfloor x \rfloor$ を用い, これを床関数 (floor function) という. 切り捨てを意味するもので, $x - \lfloor x \rfloor$ は小数部分である. 切り上げは $\lceil x \rceil$ と表し, 天井関数 (ceil function) という.

各辺を x 乗すれば,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leqq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

最左辺と最右辺はそれぞれ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e.$$

さて, x が限りなく大きくなるとき, n も限りなく大きくなる $[n \to \infty \Leftrightarrow x \to \infty]$ から, はさみうちの原理によって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ から $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ へ

$x < 0$ のとき, $y = -x > 0$ とおけば,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right).$$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e.$$

やっと $\lim_{\theta\to 0}(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}} = e$ が示せる!

$\theta \neq 0$ のとき, $x = \dfrac{1}{\theta}$ とおけば $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = (1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}$ となる.
ここで, $\theta > 0$ のまま $\theta \to 0$ $[x \to \infty \Leftrightarrow \theta \to +0]$ と $\theta < 0$ のまま $\theta \to 0$ $[x \to -\infty \Leftrightarrow \theta \to -0]$ とに分けて考えれば,

$$\lim_{\theta\to+0}(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$
$$\lim_{\theta\to-0}(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

右極限と左極限が一致するので, 収束することがわかった.

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\theta\to 0}(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}$$

指数関数の微分公式

$f(x) = a^x$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h}$$

ここで, $h = \log_a(1+t)$ とおくと, $a^h = 1+t$ であり, $h \to 0$ と $t \to 0$ とは同じである.

$$\lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{t\to 0} a^x \frac{(1+t) - 1}{\log_a(1+t)} = \lim_{t\to 0} a^x \frac{1}{\frac{1}{t}\log_a(1+t)}$$
$$= \lim_{t\to 0} a^x \frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}} = a^x \frac{1}{\log_a e}$$
$$= a^x \frac{1}{\frac{\log_e e}{\log_e a}} = a^x \frac{\log_e a}{\log_e e} = a^x \frac{\log a}{1} = a^x \log a.$$

特に, $a = e$ のときは $\log e = 1$ なので $(e^x)' = e^x$.

対数関数の微分公式

$f(x) = \log_a x.$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right).$$

ここで, $h = tx$ とおくと, $t = \dfrac{h}{x}$ であり, $h \to 0$ と $t \to 0$ とは同じである.

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{tx} \log_a(1+t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{x} \log_a (1+t)^{\frac{1}{t}}$$
$$= \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x} \frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{x} \frac{1}{\log a} = \frac{1}{x \log a}.$$

特に, $a = e$ のときは $\log e = 1$ なので $(\log x)' = \dfrac{1}{x}.$

例題

(1) $y = x^3 e^x$

積の微分法より

$$y' = (x^3)'(e^x) + (x^3)(e^x)' = 3x^2e^x + x^3e^x = e^x(3x^2 + x^3).$$

(2) $y = \dfrac{x^2}{\log x}$

商の微分法より

$$y' = \frac{(x^2)'(\log x) - (x^2)(\log x)'}{(\log x)^2} = \frac{2x\log x - x^2 \times \frac{1}{x}}{(\log x)^2}$$

$$= \frac{2x\cos x - x}{(\log x)^2}.$$

(3) $y = e^{5x^4}$

合成関数の微分法より, $y = e^u$, $u = 5x^4$ だから

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \times 20x^3 = 20x^3 e^{5x^4}.$$

(4) $y = (\log x)^5$

合成関数の微分法より, $y = u^5$, $u = \log x$ だから

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5u^4 \times \frac{1}{x} = \frac{5(\log x)^4}{x}.$$

(5) $y = e^{-2x}\sin 3x$

積の微分法と合成関数の微分法より,

$$\begin{aligned} y' &= (e^{-2x})'(\sin 3x) + (e^{-2x})(\sin 3x)' \\ &= e^{-2x}(-2x)'\sin 3x + e^{-2x}\cos 3x(3x)' \\ &= -2e^{-2x}\sin 3x + 3e^{-2x}\cos 3x = e^{-2x}(-2\sin 3x + 3\cos 3x). \end{aligned}$$

(6) $y = \log(2+\cos 3x)$

合成関数の微分法より, $y = \log u$, $u = 2 + \cos 3x$ だから

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\times(2+\cos 3x)' = \frac{-\sin 3x(3x)'}{2+\cos 3x} = \frac{-3\sin 3x}{2+\cos 3x}.$$

対数微分法

$y = f(x)^{g(x)}$ のような関数を微分する場合, $\log y = \log f(x)^{g(x)}$ を考えて微分するものである.

$y = x^x$ の導関数

$\log y = \log x^x = x \log x$ だから, 両辺を x で微分すると,

$$(\log y)' = \frac{1}{y} \times y',$$

$$(x \log x)' = (x)'(\log x) + (x)(\log x)' = \log x + x \times \frac{1}{x} = \log x + 1.$$

ゆえに,

$$\frac{1}{y} y' = 1 + \log x. \quad \therefore\ y' = (1 + \log x)y = (1 + \log x)x^x.$$

$y = f(x)^{g(x)} = (e^{\log f(x)})^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}$ なので, 対数微分法は単に指数関数や対数関数の微分法と合成関数の微分法を組み合わせて計算しているもの, ということになる.

練習問題

次の関数の導関数を求めなさい.

(1) $y = x^6 e^x$　(2) $y = \dfrac{\log x}{x^2}$　(3) $y = \dfrac{x^3}{2 + \log x}$

(4) $y = \dfrac{e^x}{e^x + 3}$　(5) $y = 3e^{2x}$　(6) $y = e^{5x^2}$

(7) $y = \log(x^2 + 4)$　(8) $y = \sqrt{e^x + 1}$　(9) $y = \dfrac{1}{(2 + \log x)^3}$

(10) $y = \log(3 + 2\cos x)$　(11) $y = e^{\tan x}$　(12) $y = \sin(\log x)$

(13) $y = \cos(3e^x)$　(14) $y = e^{3x}\sin 4x$　(15) $y = e^{-2x}\cos 5x$

(16) $y = x^3 e^{2x}$　(17) $y = x^2 e^{-x^3}$　(18) $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 3})$

次の関数の導関数を対数微分法を用いて計算しなさい.

(19) $y = x^{\log x}$　(20) $y = x^{\frac{1}{x}}$　(21) $y = (\cos x)^{\sin x}$

練習問題の解答 (答えのみ)

(1) $y' = e^x(6x^5 + x^6)$ (2) $y' = \dfrac{1 - 2\log x}{x^3}$ (3) $y' = \dfrac{x^2(5 + 3\log x)}{(2 + \log x)^2}$

(4) $y' = \dfrac{3e^x}{(e^x + 3)^2}$ (5) $y' = 6e^{2x}$ (6) $y' = 10xe^{5x^2}$

(7) $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$ (8) $y' = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x + 1}}$ (9) $y' = \dfrac{-3}{x(2 + \log x)^4}$

(10) $y' = \dfrac{-2\sin x}{3 + 2\cos x}$ (11) $y' = \dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$ (12) $y' = \dfrac{\cos(\log x)}{x}$

(13) $y' = -3e^x \sin(3e^x)$ (14) $y' = e^{3x}(3\sin 4x + 4\cos 4x)$

(15) $y' = e^{-2x}(-2\cos 5x - 5\sin 5x)$ (16) $y' = e^{2x}(3x^2 + 2x^3)$

(17) $y' = e^{-x^3}(2x - 3x^4)$ (18) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$

(19) $y' = 2x^{\log x - 1} \log x$

(20) $y' = (1 - \log x) x^{\frac{1}{x} - 2}$

(21) $y' = (\cos x)^{\sin x - 1} (\cos^2 x \log \cos x - \sin^2 x)$

おまけの問題

a, b は実数とし, $f(x) = e^{ax} cosbx$, $g(x) = e^{ax}\sin bx$ とする.
(1) $f'(x)$, $g'(x)$ を計算しなさい.
(2) $f(x)$, $g(x)$ を $f'(x)$ および $g'(x)$ を用いて書き表しなさい.

この方法を用いると, $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx$ などが比較的簡単に計算できてしまう.

$f_0(x) = x^3 e^{2x}$ とする.
関数の列 $\{f_n(x)\}_n$ を $f_{n+1}(x) = f_n'(x)$ と定める.
$f_n(x)$ を求めなさい.

実は, ライプニッツの公式を使えば, より簡単に計算できてしまう.