

高階微分・平均値の定理のまとめ

鈴木 敏行

神奈川大学

2020 年 4 月 9 日

★ このスライドの転載や再配布などを禁止する.

このスライドは、**逆三角関数**についてまとめたものである。

あわせて、逆関数に関する話も触れておく。

⇒ 逆関数の定義 / 逆関数の微分法

逆関数の微分法

$$\{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

いくつか例題や練習問題も載せているので、自習に活用してください。

- 逆三角関数の定義
- 逆三角関数の導関数

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

関数 $y = f(x)$ とは

1つのデータ x を与えたとき, 1つのデータ y を返してくれる仕組み!

これに対し, 逆の対応

データ y を与えたとき, データ x を返してくれる仕組み

を逆関数という.

もちろん, 何の条件もなければ逆関数が作れないこともある.

$y = x^2$ の逆関数

$y = x^2$ となる x は $x = \pm\sqrt{y}$ なので, $y = f(x) = x^2$ の逆関数は

$$\bullet f^{-1}(y) = \sqrt{y} \qquad \bullet f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$$

どっちにすればいいの??

必要に応じて定義域を変更することで, 逆関数が作れる.

連続関数の場合には, 次の事実が知られている.

$f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で狭義単調増加で, 値域が $\alpha \leq y \leq \beta$ の関数であれば, 逆関数 $f^{-1}(x)$ が $\alpha \leq x \leq \beta$ で定義できる.

$f(x)$ が**狭義単調増加**とは $x_1 < x_2$ のとき $f(x_1) < f(x_2)$ となることをいう.

増加ではなく, 減少の場合 [$f(x_1) > f(x_2)$] でも同様に成立する.

具体的な関数の逆関数の作り方は

- $y = f(x)$ を x について解く.
- 出てきた解のうち, 条件に合うものを 1 つ選択する.
- 結果として $x = (y \text{ の式})$ となるが, x と y の文字を逆にすれば $y = f^{-1}(x)$ が出来上がる.

[最初から x と y の文字を入れ替えて, $y =$ の式に直す, というのもよい]

ちなみに, $y = f^{-1}(x)$ の定義域と値域については

- 定義域: $y = f(x)$ の値域と同じ,
- 値域: $y = f(x)$ の定義域と同じ.

※もちろん, x と y の文字は入れ替える必要はある.

$f(x) = x + \sqrt{2x+1}$ の逆関数

$y = x + \sqrt{2x+1}$ を x について解こう.

$$y - x = \sqrt{2x+1} \quad (y - x)^2 = 2x + 1 \quad x^2 - 2yx + y^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x^2 - 2(y+1)x + y^2 - 1 = 0$$

$$x = y + 1 \pm \sqrt{(y+1)^2 - (y^2 - 1)} = y + 1 \pm \sqrt{2y+2}$$

$x = 0$ のとき $y = 1$ だから, 複号 $\pm$ は $-$ の方を選ばないといけない.

$$\therefore x = y + 1 - \sqrt{2y+2}. \quad y = f^{-1}(x) = x + 1 - \sqrt{2x+2}.$$

次の関数の逆関数を求めなさい.

$$(1) f(x) = 3 + \sqrt{2x - 1}$$

$$(2) f(x) = \frac{2x - 9}{x - 4}$$

$$(3) f(x) = 2^{x+3} - 5$$

$$(4) f(x) = x + \sqrt{4x - 3}$$

$$(1) f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$$

$$(2) f^{-1}(x) = \frac{4x - 9}{x - 2}$$

$$(3) f^{-1}(x) = \log_2(x + 5) - 3$$

$$(4) f^{-1}(x) = x + 2 + \sqrt{4x + 1}$$

$a^x = y$ は $x = \log_a y$ と同じである!

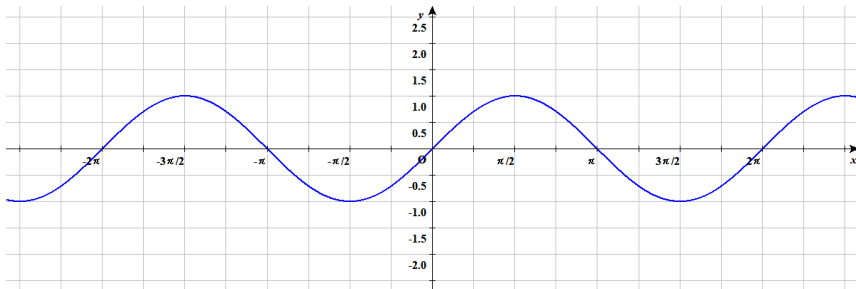
三角関数の逆関数:逆三角関数

では、三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ についてその逆関数を作ってみよう。

例えば、 $y = \sin x$ の逆関数を求めるために、 x について解くと …

- $y = 0$ の場合: $0 = \sin x$ だから $x = n\pi$ (n は整数)
- $y = \frac{1}{2}$ の場合: $\frac{1}{2} = \sin x$ だから $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ (n は整数)

三角関数は周期関数なので、定義域を制限しないと逆関数は作れない!



(1) $f(x) = \sin x$. $y = \sin x$ は

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において狭義単調増加であり, $-1 \leq y \leq 1$ に値をとる.

したがって, 逆関数が存在する.

その逆関数を $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ や $\arcsin x$ と書き, アークサインと読む.

C 言語をはじめとしたプログラミング言語では `asin` を用いることが多い.

値が 1 つだけということで $\text{Sin}^{-1}x$ や $\text{Arcsin}x$ と書かれることがある.

注意

$\sin^{-1} x$ は $\frac{1}{\sin x}$ のことではない! $\frac{1}{\sin^2 x}$ を $\sin^{-2} x$ と書かないで!

$\sin(\sin^{-1} x) = x$ は問題ない. $-1 \leq x \leq 1$ においてのみ成立している.

$\sin^{-1}(\sin x) = x$ はまずい!

$\sin \pi = 0$ だから, $\sin^{-1}(\sin \pi) = \sin^{-1} 0 = 0$.

$\sin^{-1}(\sin x) = x$ は $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ においてのみ成立する.

(2) $f(x) = \cos x$. $y = \cos x$ は

$0 \leq x \leq \pi$ において狭義単調減少であり, $-1 \leq y \leq 1$ に値をとる.

したがって, 逆関数が存在する.

その逆関数を $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ や $\arccos x$ と書き, アークコサイン と読む.

(3) $f(x) = \tan x$. $y = \tan x$ は

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ において狭義単調増加であり, 実数全体に値をとる.

したがって, 逆関数が存在する.

※実数全体を $-\infty < y < +\infty$ または $\mathbb{R}$ とも書き表す.

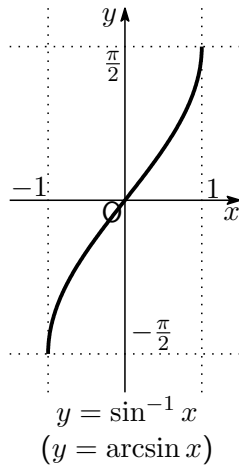
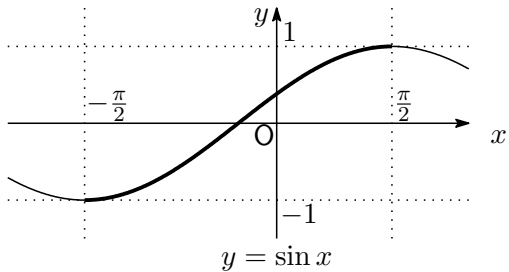
その逆関数を $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ や $\arctan x$ と書き, アークタンジェント と読む.

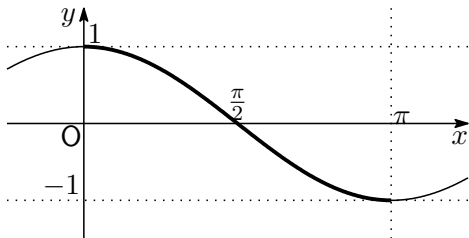
三角関数の値を思い出すと、次のような表が完成する.

	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin^{-1}$ (arcsin)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos^{-1}$ (arccos)	π	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

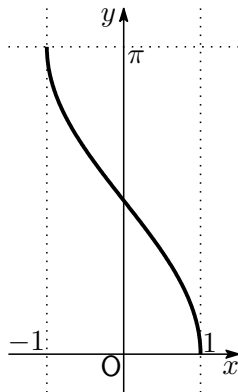
	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\tan^{-1}$ (arctan)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

ただし, $\tan^{-1} \infty$ は $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x$ のことと解釈する.



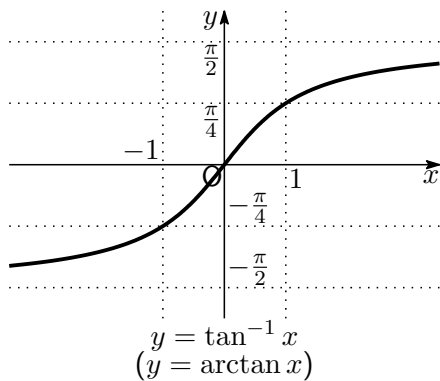
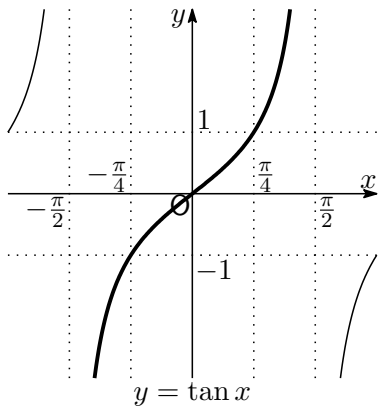


$$y = \cos x$$



$$y = \cos^{-1} x$$

$$(y = \arccos x)$$



$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

$\sin^{-1} x = \theta$ とおくと, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ である.

$x = \sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ [加法定理などを思い出してほしい].

ここで, $0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \pi$ となっていることに注意する.

$x = \cos \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$ のとき, $\alpha = \cos^{-1} x$ と書くのであった.

そのため, $x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, $0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \pi$ なので $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \theta$.

以上から,

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x}$$

$\tan^{-1} x = \theta$ とおくと, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ である.

ここで, 必要に応じて $\sin$ や $\cos$ の加法定理を用いれば,

$$x = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2} - \theta)}$$

$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{x}$ である. $0 < \frac{\pi}{2} - \theta < \pi$ となっていることに注意する.

$x > 0$ のとき, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であり, $0 < \frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\pi}{2}$ に注意する.

したがって, $\tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \theta$. 以上から,

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\pi}{2}.$$

一方, $x < 0$ のとき, $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ であり, $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \theta < \pi$ に注意する.

$$\frac{1}{x} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta - \pi\right)$$

であり, $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \theta - \pi < 0$ だから, $\tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \theta - \pi$. 以上から,

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta - \pi\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

ゆえに

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0. \end{cases}$$

$$(1) \ 5 \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi, \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} \text{ だから,}$$

$$5 \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5 \times \frac{2}{3}\pi + 3 \times -\frac{1}{4}\pi = \frac{40-9}{12}\pi = \frac{31}{12}\pi.$$

逆三角関数の値の足し算だからといって, 答えを $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲に直そう, とは考えなくてよい.

逆三角関数の値で特に $\cos^{-1} x$ の値を勘違いする人が多いので注意しよう.

- $\cos^{-1} x$ は負の数になることはない.
- $\cos^{-1} 0 = 0$ ではなく $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$. また, $\cos^{-1} 1 = 0$.

$$(2) \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}$$

$\tan^{-1} \frac{1}{2} = \alpha$, $\tan^{-1} \frac{1}{3} = \beta$ とおく. $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$ に注意する.

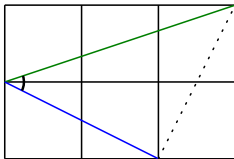
※ $\tan^{-1} x$ は単調増加な関数で $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$.

さて, $\tan$ の加法定理から,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{5}{6} \div \frac{5}{6} = 1.$$

$0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ なので, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$. $\therefore \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

この式は, 次の図を考えていることと同じである.



次の値を求めなさい.

$$(1) 7 \sin^{-1} \frac{1}{2} - 5 \cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2) 3 \cos^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) 7 \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} + 3 \tan^{-1}(-1) \quad (4) \tan^{-1}(1 + \sqrt{2})$$

$$(5) \cos^{-1} \left(-\frac{3}{5} \right) + \cos^{-1} \left(-\frac{4}{5} \right) \quad (6) \sin^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{10}} \right) + \sin^{-1} \left(-\frac{3}{\sqrt{10}} \right)$$

練習問題の解答 (答えのみ)

$$\begin{array}{lll} (1) & -3\pi & (2) \frac{23}{12}\pi & (3) \frac{5}{12}\pi \\ (4) & \frac{3}{8}\pi & (5) \frac{3}{2}\pi & (6) -\frac{1}{2}\pi \end{array}$$

(4) は $\tan(2\theta)$ $\theta = \tan^{-1}(1 + \sqrt{2})$ を考えればよい.

実は、次の等式も成立する (マチン (Machin) の公式).

$$4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{5} \text{ とおくと, } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}.$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{5}{12} \text{ なので } 0 < 2\alpha < \frac{\pi}{4}. \quad \tan(4\alpha) = \frac{120}{119} \text{ なので } \frac{\pi}{4} < 4\alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{1}{239} \text{ とおくと, } 0 < \beta < \frac{\pi}{4}.$$

$$\tan(4\alpha - \beta) = 1, \quad 0 < 4\alpha - \beta < \frac{\pi}{2} \text{ であるから, } 4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}.$$

マチンの公式とマクローリン展開を使い, π の近似値が計算できる.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{\pi}{4} \text{ の公式を使うよりも早く}$$

(項数が少なく) 計算できる.

逆関数というのは $f(f^{-1}(x)) = x$ を満たすものであるから、
この両辺を x で微分すれば

$$f'(f^{-1}(x)) (f^{-1}(x))' = 1. \quad \therefore \{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

厳密な証明は $f(x)$ および $f^{-1}(x)$ が狭義単調増加 (減少) であったことを利用して、合成関数の微分法 (高校流の証明) のごとく示される.

$$\begin{aligned} \{f^{-1}(x)\}' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)}{f(f^{-1}(x+h)) - f(f^{-1}(x))} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{f(f^{-1}(x) + k) - f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \end{aligned}$$

$k = f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)$ は $h \neq 0$ である限り $k \neq 0$ であり、
 $h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$ であることに注意する.

$f(x) = x^2$ (定義域 $x \geq 0$) の逆関数は $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ である.

$$f'(x) = 2x, \quad \{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

したがって,

$$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \{f^{-1}(x)\}'.$$

$f(x) = a^x$ の逆関数は $f^{-1}(x) = \log_a x$ である.

$$f'(x) = a^x \log a, \quad \{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{x \log a}.$$

したがって,

$$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{a^{f^{-1}(x)} \log a} = \frac{1}{x \log a} = \{f^{-1}(x)\}'.$$

逆三角関数の導関数

(1) $y = \sin^{-1} x$. $f(x) = \sin x$ に逆関数の微分公式を使えば,

$$y' = \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)}.$$

ここで, $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$ だから $\cos(\sin^{-1} x) \geq 0$ である.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$. 以上から,

$$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1} x)} = \sqrt{1 - x^2}. \text{ sin}(\sin^{-1} x) = x \text{ に注意!}$$

$$\text{まとめると, } y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$\sin y = x$ の両辺を x で微分して, 次のように考えてもよい.

$$\cos y y' = 1, \quad y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(2) $y = \cos^{-1} x$. $f(x) = \cos x$ に逆関数の微分公式を使えば,

$$y' = \frac{1}{-\sin(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{\sin(\cos^{-1} x)}.$$

ここで, $0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$ だから $\sin(\cos^{-1} x) \geq 0$ である.
 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より $\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$. 以上から,

$$\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1} x)} = \sqrt{1 - x^2}. \text{ } \cos(\cos^{-1} x) = x \text{ に注意!}$$

$$\text{まとめると, } y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$\cos y = x$ の両辺を x で微分して, 次のように考えてもよい.

$$-\sin y y' = 1, \quad y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(3) $y = \tan^{-1} x$. $f(x) = \tan x$ に対し,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

逆関数の微分公式を使えば,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1 + \tan^2(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2 x (\tan^{-1} x)} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 x (\tan^{-1} x)} \quad \tan(\tan^{-1} x) = x \text{ に注意!} \end{aligned}$$

$\tan y = x$ の両辺を x で微分して, 次のように考えてもよい.

$$\frac{1}{\cos^2 y} y' = 1, \quad 1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}, \quad y' = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

さすがに毎回逆関数の微分法を用いて計算するのも大変なので、逆三角関数の導関数はこれで理解しておく方がいいと思われる。

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

では、逆三角関数が入った関数の導関数を求める計算を練習してみよう。

例題

$$(1) y = 5 \sin^{-1} x - 3 \cos^{-1} x$$

$$y' = 5(\sin^{-1} x)' - 3(\cos^{-1} x)' = 5 \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 3 \times -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{8}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(2) y = \tan^{-1} \frac{1}{x}$$

合成関数の微分法より $y = \tan^{-1} u$, $u = \frac{1}{x} = x^{-1}$ だから

$$y' = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \times -\frac{1}{x^2} = \frac{-1}{(1+\frac{1}{x^2})x^2} = \frac{-1}{x^2+1}.$$

次の関数の導関数を求めなさい.

$$(1) f(x) = 3 \cos^{-1} x - 2 \sin^{-1} x$$

$$(3) f(x) = x^2 \sin^{-1} x$$

$$(5) f(x) = \sin^{-1} x \cos^{-1} x$$

$$(7) f(x) = \tan^{-1}(\sin x)$$

$$(9) f(x) = \cos^{-1}(\sqrt{2x - x^2})$$

$$(2) f(x) = \tan^{-1}(2x - 1)$$

$$(4) f(x) = \log(\cos^{-1} x)$$

$$(6) f(x) = \sin^{-1} x^3$$

$$(8) f(x) = \tan^{-1}(e^x)$$

$$(10) f(x) = \tan^{-1} \frac{x+b}{a}$$

練習問題の解答 (答えのみ)

$$(1) f'(x) = \frac{-5}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(2) f'(x) = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$$

$$(3) f'(x) = 2x \sin^{-1} x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(4) f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cos^{-1} x}$$

$$(5) f'(x) = \frac{\cos^{-1} x - \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(6) f'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$$

$$(7) f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$$

$$(8) f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

$$(9) f'(x) = -\frac{1-x}{|1-x|\sqrt{2x-x^2}}$$

$$(10) f'(x) = \frac{a}{x^2 + 2bx + a^2 + b^2}$$

(9) は $0 < x < 1$ のとき $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{2x-x^2}}$, $1 < x < 2$ のとき

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ である. $x = 0, 1, 2$ では微分不可能.