高階微分・平均値の定理のまとめ

鈴木 敏行

神奈川大学

2020 年 4 月 14 日

このスライドは,

- 高階微分

特に,

- ライプニッツの公式

- 平均値の定理

特に,

- (通常の平均値の定理) ラグランジュの平均値定理
- コーシーの平均値定理

についてまとめたものである.

そもそも, 導関数というのは $y = f(x)$ という関数から新たに決まる対応

$$a \mapsto f'(a) \ (f'(a) \text{ は } x = a \text{ での微分係数})$$

のことである.

導関数を $f'(x)$ や y' と表すほかに, 次のような書き方がある.

$$\frac{df}{dx}(x),\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{dy}{dx},\ \dot{f}(x),\ \dot{y}$$

$f'(x)$ も関数なわけだから, その導関数を考えることはなんの不自然なことはない! (計算は面倒になるだろうが $\cdots$)

関数 $f(x)$ を微分したものを導関数といい, $f'(x)$ や $\dfrac{df}{dx}$ と表すが,

- $f'(x)$ を微分したものを (微分が 2 回目ということで)

2 階導関数 または 第 2 次導関数 といい, $f''(x)$ や $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ と表す.

- $f''(x)$ を微分したものを (微分が 3 回目ということで)

3 階導関数 または 第 3 次導関数 といい, $f'''(x)$ や $\dfrac{d^3 f}{dx^3}$ と表す.

- 一般に, $f(x)$ を n 回だけ微分したものを

n 階導関数 または 第 n 次導関数 といい, $f^{(n)}(x)$ や $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ と表す.

$'$ の個数をいちいち数えるのが面倒なので,
最初から $'$ をつける個数を (n) と書き表していると思ってほしい.

$f''''''''''''''''''''''''''''''(x) \Leftarrow$ これ $'$ は何個あるかな??

30 個なので $f^{(30)}(x)$ と同じ!!

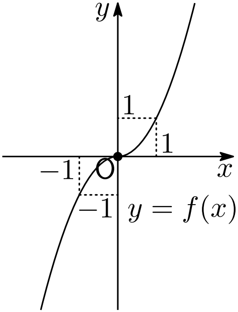
特に, $f^{(0)}(x) = f(x)$, $f^{(1)}(x) = f'(x)$ である.

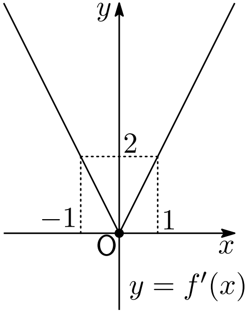
ちなみに, n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続となるような
(微分する前の) 関数 $f(x)$ は C^n 級であるという.

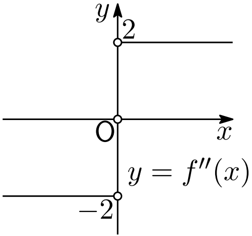
何回も微分できて, ずっと連続であるような
関数 $f(x)$ は C^∞ 級であるという.

多項式や $\sin x$, $\cos x$, e^x などは C^∞ 級の関数である.

一方, $f(x) = |x|x$ は $f'(x) = 2|x|$ だが, $f''(x)$ は $x = 0$ では存在しない.
$f'(x)$ は連続なので, $f(x) = |x|x$ は C^1 級の関数である.







例

(1) $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, $f''''(x) = 0$.

(2) $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x = f(x)$ なので $f^{(n)}(x) = e^x$.

(3) $f(x) = e^{-x}$

$f'(x) = -e^{-x} = -f(x)$, $f''(x) = e^{-x} = f(x)$ なので

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-x} & n \text{ は偶数}, \\ -e^{-x} & n \text{ は偶数}. \end{cases}$$

一般に $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$ となることがわかる.
(ちゃんと示すのであれば数学的帰納法を使う必要がある).

$\sin x$, $\cos x$ の高階導関数は, 順次微分していくと

$$\sin x \to \cos x \to -\sin x \to -\cos x \to \sin x \to \cos x \to \cdots$$

となるので,

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \sin x & n = 4k, \\ \cos x & n = 4k+1, \\ -\sin x & n = 4k+2, \\ -\cos x & n = 4k+3 \end{cases} \qquad (\cos x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x & n = 4k, \\ -\sin x & n = 4k+1, \\ -\cos x & n = 4k+2, \\ \sin x & n = 4k+3 \end{cases}$$

$$= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \qquad\qquad = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{\cos x} \arrow[dl, bend right] & \\
\boxed{-\sin x} \arrow[dr, bend right] & & \boxed{\sin x} \arrow[ul, bend right] \\
& \boxed{-\cos x} \arrow[ur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

(4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

順次微分していくと

$$x^{-1} \to -x^{-2} \to 2x^{-3} \to -6x^{-4} \to 24x^{-5} \to -120x^{-6} \to \cdots$$

これから $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1}$ と推測される.
実際にこれで正しいが, 数学的帰納法を使ってちゃんと示す必要がある.

高階導関数は順次微分していくほか, 求める方法はない!

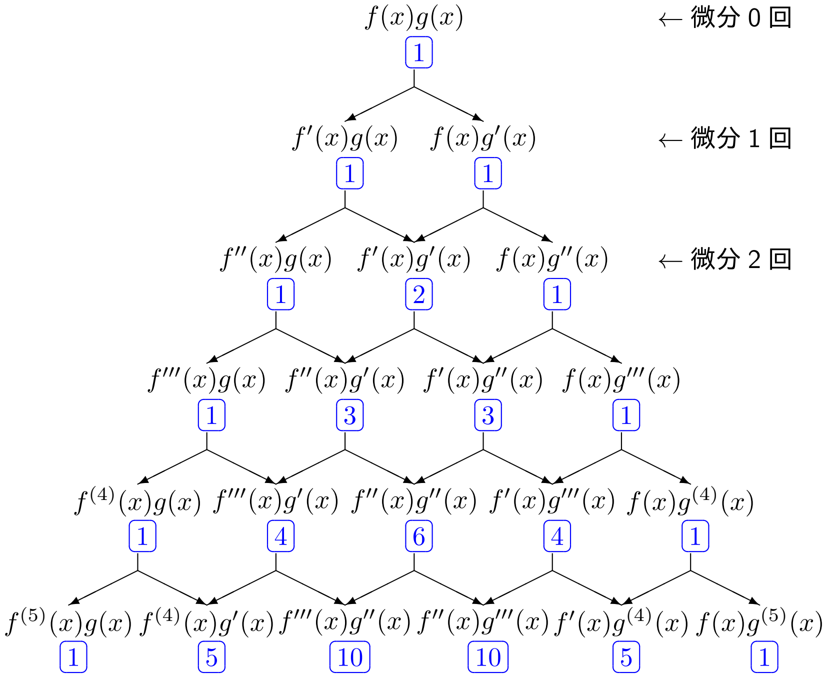
積の微分法を思い出そう

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

これをもう 1 回微分すると

$$\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}'' &= \{f'(x)g(x)\}' + \{f(x)g'(x)\}' \\
&= \{f'(x)\}'g(x) + f'(x)\{g(x)\}' + \{f(x)\}'g'(x) + f(x)\{g'(x)\}' \\
&= f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \\
&= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x).
\end{aligned}$$

この後も次々に微分していくと, 次のような図が出来上がる.


$f(x)g(x)$
1
← 微分 0 回
$f'(x)g(x)$ $f(x)g'(x)$
1 1
← 微分 1 回
$f''(x)g(x)$ $f'(x)g'(x)$ $f(x)g''(x)$
1 2 1
← 微分 2 回
$f'''(x)g(x)$ $f''(x)g'(x)$ $f'(x)g''(x)$ $f(x)g'''(x)$
1 3 3 1
$f^{(4)}(x)g(x)$ $f'''(x)g'(x)$ $f''(x)g''(x)$ $f'(x)g'''(x)$ $f(x)g^{(4)}(x)$
1 4 6 4 1
$f^{(5)}(x)g(x)$ $f^{(4)}(x)g'(x)$ $f'''(x)g''(x)$ $f''(x)g'''(x)$ $f'(x)g^{(4)}(x)$ $f(x)g^{(5)}(x)$
1 5 10 10 5 1

出てくる数を見ると, パスカルの三角形に出てくるものと同じ!
　上から 0 段, 1 段, 2 段, $\cdots$, n 段, $\cdots$,
　左から 0 番, 1 番, 2 番, $\cdots$, r 番, $\cdots$,
このときに出てくる数は 2 項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ である.

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r\,(r-1)\cdots 1}. $$

以上から,

$$ \{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r f^{(n-r)}(x)\,g^{(r)}(x). $$

これがライプニッツの公式である.

ちゃんと証明するなら数学的帰納法を用いる必要があるが,
ここではやめておく.

$x^2 e^{3x}$ の n 次導関数

まず,

$$
\begin{array}{llll}
(x^2)^{(0)} = x^2 & (x^2)^{(1)} = 2x & (x^2)^{(2)} = 2 & (x^2)^{(r)} = 0 \ (r \geqq 3) \\
(e^{3x})^{(0)} = e^{3x} & (e^{3x})^{(1)} = 3e^{3x} & (e^{3x})^{(2)} = 9e^{3x} & (e^{3x})^{(r)} = 3^r e^{3x}
\end{array}
$$

ここで, ライプニッツの公式から,

$$
\begin{aligned}
&(x^2 e^{3x})^{(n)} \\
&= {}_n\mathrm{C}_0 (x^2)^{(0)} (e^{3x})^{(n)} + {}_n\mathrm{C}_1 (x^2)^{(1)} (e^{3x})^{(n-1)} + {}_n\mathrm{C}_2 (x^2)^{(2)} (e^{3x})^{(n-2)} \\
&+ \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} (x^2)^{(n-1)} (e^{3x})^{(1)} + {}_n\mathrm{C}_n (x^2)^{(n)} (e^{3x})^{(0)} \\
&= x^2 \times 3^n e^{3x} + \frac{n}{1} \times 2x \times 3^{n-1} e^{3x} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 2 \times 3^{n-2} e^{3x} + \cdots + 0 + 0 \\
&= e^{3x} \left[3^n x^2 + 2n 3^{n-1} x + n(n-1) 3^{n-2} \right] \\
&= 3^{n-2} e^{3x} [9x^2 + 6nx + n(n-1)].
\end{aligned}
$$

$e^{-x}\sin 2x$ の 3 次導関数

まず,

$$(e^{-x})^{(0)} = e^{-x} \quad (e^{-x})^{(1)} = -e^{-x} \qquad (e^{-x})^{(2)} = e^{-x} \quad (e^{-x})^{(3)} = -e^{-x}$$

$$(\sin 2x)^{(0)} = \sin 2x \qquad (\sin 2x)^{(1)} = 2\cos 2x$$

$$(\sin 2x)^{(2)} = -4\sin 2x \qquad (\sin 2x)^{(3)} = -8\cos 2x$$

ここで, ライプニッツの公式から,

$$\begin{aligned}
&(e^{-x}\sin 2x)^{(3)} \\
&= {}_3\mathrm{C}_0(e^{-x})^{(3)}(\sin 2x)^{(0)} + {}_3\mathrm{C}_1(e^{-x})^{(2)}(\sin 2x)^{(1)} \\
&+ {}_3\mathrm{C}_2(e^{-x})^{(1)}(\sin 2x)^{(2)} + {}_3\mathrm{C}_3(e^{-x})^{(0)}(\sin 2x)^{(3)} \\
&= -e^{-x} \times \sin 2x + 3 \times e^{-x} \times 2\cos 2x \\
&+ 3 \times -e^{-x} \times -4\sin 2x + e^{-x} \times -8\cos 2x \\
&= e^{-x}(11\sin 2x - 2\cos 2x).
\end{aligned}$$

練習問題

次の関数の 3 次導関数を求めなさい.

$$(1)\quad f(x)=\sqrt{2x+3} \qquad (2)\quad f(x)=\tan x \qquad (3)\quad f(x)=e^{x^2}$$

次の関数の 3 次導関数をライプニッツの公式を利用して求めなさい.

$$(4)\quad f(x)=e^{3x}\cos 2x \quad (5)\quad f(x)=e^{-4x}\sin 3x \quad (6)\quad f(x)=x^2\sin 5x$$

次の関数の n 次導関数を求めなさい.

$$(7)\quad f(x)=(2x+4)e^{2x} \qquad (8)\quad f(x)=x^2e^{-3x} \qquad (9)\quad f(x)=x^3e^x$$

練習問題の解答 (答えのみ)

(1) $f'''(x) = 3(2x+3)^{-\frac{5}{2}}$.

ちなみに, $f'(x) = (2x+3)^{-\frac{1}{2}}, f''(x) = -(2x+3)^{-\frac{3}{2}}$.

(2) $f'''(x) = \dfrac{2+4\sin^2 x}{\cos^4 x}$.

ちなみに, $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}, f''(x) = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

(3) $f'''(x) = (8x^3+12x)e^{x^2}$.

ちなみに, $f'(x) = 2xe^{x^2}, f''(x) = (4x^2+2)e^{x^2}$.

(4) $f'''(x) = -e^{3x}(46\sin 2x + 9\cos 2x)$.

(5) $f'''(x) = e^{-4x}(44\sin 3x + 117\cos 3x)$.

(6) $f'''(x) = 5(6-25x^2)\cos 5x - 150x\sin 5x$.

(7) $f^{(n)}(x) = 2^n(2x + n + 4)e^{2x}$.

(8) $f^{(n)}(x) = (-3)^{n-2}[9x^2 - 6nx + n(n-1)]e^{3x}$.

(9) $f^{(n)}(x) = [x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)]e^x$.

平均値の定理

次に, テイラー展開をはじめ, 様々な微分計算の応用を考えるのに
重要な役割を果たす平均値の定理を考察していこう.

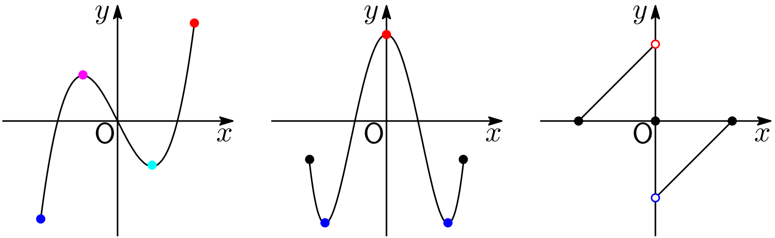
その前に, 連続関数についてわかっている
重要な事項をいくつかまとめておこう

最大値最小値の定理

$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続であるとする.
このとき関数 $f(x)$ は最大値と最小値が存在する. いいかえれば

$$f(c_{\min}) \leqq f(x) \leqq f(c_{\max}) \quad a \leqq x \leqq b$$

となる $c_{\min}$ と $c_{\max}$ が $a \leqq x \leqq b$ にある.

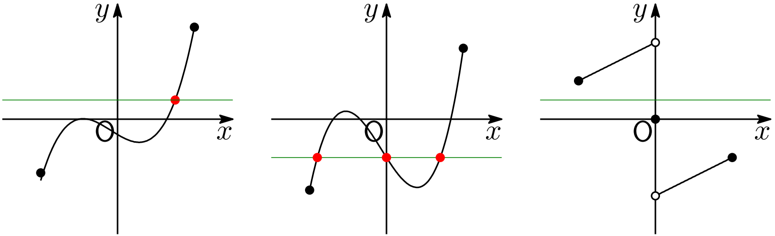


最大値が ●, 最小値が ●. ● はただの極大, ● はただの極小.
左 2 つの関数は連続関数だから, 最大値と最小値がある.
右の関数は $x = 0$ で連続ではない影響で, 最大値と最小値が存在しない.

中間値の定理

$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続であるとする.
このとき $f(a)$ と $f(b)$ の間にあるどんな数 m に対しても
$f(c) = m$ となる c が $a < x < b$ に存在する.

存在するけど, 1 個だけとは限らないので注意すること.

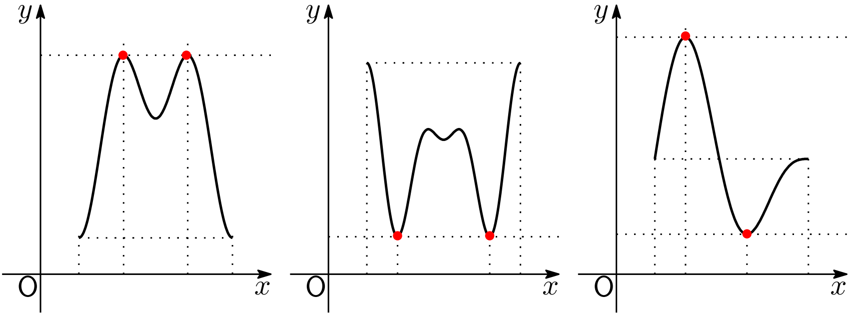


左 2 つの関数は連続関数だから, $f(x) = m$ となる x が $a < x < b$ にある.
右の関数は $x = 0$ で連続ではないため, $f(x) = m$ となる x が存在しない.

平均値の定理を考えるうえで, 次が一番本質的なものである.

ロルの定理 (Rolle)

$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能とする.
さらに, $f(a) = f(b)$ とする.
このとき, $f'(c) = 0$ となる c が $a < x < b$ にある.



$f(x)$ が定数関数である場合は, $f'(x) = 0$ なので,
$a < x < b$ である x をどれでもいいから c とみなせばよい.

以下, $f(x)$ は定数関数ではないとする.
$f(x)$ は連続関数だったから, 最大値と最小値が存在する.
定数関数ではないのだから, 最大値と最小値は異なる値である.

$f(a) = f(b)$ が最小値ではない場合, 最小値を $f(c)$ とする.
$a < c < b$ に注意する. $f(c) \leqq f(x)$ なので,

$$x > c \text{ のとき}, \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqq 0 \ (\text{分母}+, \text{分子}+), \quad \lim_{x \to c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqq 0.$$
$$x < c \text{ のとき}, \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqq 0 \ (\text{分母}-, \text{分子}+), \quad \lim_{x \to c-0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqq 0.$$

$x = c$ で微分可能であるから, 右極限も左極限も同じ $f'(c)$ になる.
$f'(c) \geqq 0$ と $f'(c) \leqq 0$ とを合わせると $f'(c) = 0$.

$f(a) = f(b)$ が最大値ではない場合, 最大値を $f(c)$ とする.
$a < c < b$ に注意する. $f(c) \geqq f(x)$ なので,

$$x > c \text{ のとき}, \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqq 0 \ (\text{分母}+, \text{分子}-), \quad \lim_{x \to c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqq 0.$$
$$x < c \text{ のとき}, \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqq 0 \ (\text{分母}-, \text{分子}+), \quad \lim_{x \to c-0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqq 0.$$

$x = c$ で微分可能であるから, 右極限も左極限も同じ $f'(c)$ になる.
$f'(c) \leqq 0$ と $f'(c) \geqq 0$ とを合わせると $f'(c) = 0$.

以上から $f'(c)$ となる c を見つけることができた! (証明終了)

ロルの定理の証明方法から, 後に紹介する事実だが

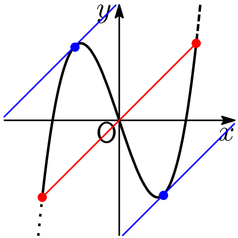
$x = c$ で極値をとり, 微分可能であれば $f'(c) = 0$

を導くことができる (証明がほとんど同じ).

ラグランジュの平均値の定理

$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能とする.
このとき, 次を満たす c が存在する.

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a), \quad a < c < b.$$



ラグランジュの平均値の定理の証明

$F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ とおく.

$F(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能であり,
$F(a) = 0,\ F(b) = 0$ である.

ロルの定理から $F'(c) = 0$ となる c が $a < x < b$ にある.

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \therefore\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

ゆえに, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ となる c が見つけられた. (証明終了)

ちなみに, $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を通る直線の方程式が

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

ということから, $F(x)$ は $y = f(x)$ とこの直線との差を表している.

平均値の定理における c は a, b によっても異なるが,
当然, 関数 $f(x)$ によっても変わってくる.

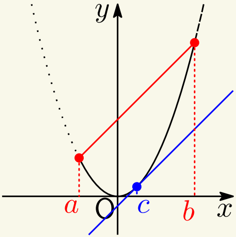
$f(x) = x^2$

まず, $f'(x) = 2x$ に注意する.

$$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b+a)(b-a), \quad f'(c)(b-a) = 2c(b-a).$$

したがって, 平均値定理が成り立つような c は

$$2c = b + a. \quad \therefore c = \frac{a+b}{2}.$$



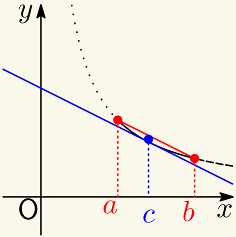
$f(x) = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$

まず, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ に注意する.

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{b-a}{ab}, \quad f'(c)(b-a) = -\frac{1}{c^2}(b-a).$$

したがって, 平均値定理が成り立つような c は

$$c^2 = ab. \quad \therefore\ c = \sqrt{ab}.$$



$a < x < b$ で微分可能という条件は外せない!

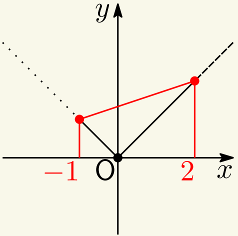
$f(x) = |x|$ は $x = 0$ では微分可能ではないが,

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

$a = -1$, $b = 2$ とすれば,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{|2| - |-1|}{2 - (-1)} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

$f'(x) = \frac{1}{3}$ となるような x は存在しない!!



一方, $x = a, b$ での微分可能性はなくても成立する
(そもそも c の候補から漏れている).

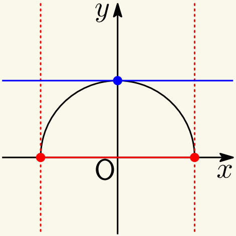
$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ で連続であり,
$-1 < x < 1$ で微分可能である. $x = -1$, $x = 1$ では微分可能ではない.

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$a = -1$, $b = 1$ とすれば,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0 - 0}{1 - (-1)} = \frac{0}{1 + 1} = 0.$$

$f'(x) = 0$ となるような x は $x = 0$.



コーシーの平均値定理

$f(x)$ および $g(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能とする. このとき, 次を満たす c が存在する.

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)], \quad a < c < b.$$

もし, $g(a) \neq g(b)$ であり, $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 になることがない場合には次のように書ける.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b.$$

次の関数にロルの定理を用いれば, コーシーの平均値定理が証明できる.

$$F(x) = [f(b) - f(a)]\,[g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)]\,[g(b) - g(a)].$$

あえて行列式を用いて書けば,

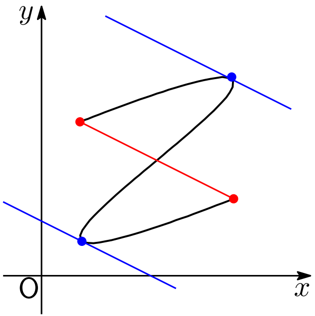
$$F(x) = \det \begin{bmatrix} f(b) - f(a) & g(b) - g(a) \\ f(x) - f(a) & g(x) - g(a) \end{bmatrix}.$$

なお, $g(x) = x$ としたものがラグランジュの平均値定理である.

コーシーの平均値定理は

$$x = g(t), \quad y = g(t)$$

と媒介変数表示されている
曲線に対するものである.
2 点を結ぶ直線の傾きと同じ接線が作れる!



A$(g(a), f(a))$, B$(g(b), f(b))$, P$(g(x), f(x))$ とおくと,
証明に出てくる $F(x)$ は AB と AP とが 2 辺となるような平行四辺形の
(符号付き) 面積を表している.

コーシーの平均値定理の証明

$F(x) = [f(b) - f(a)]\,[g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)]\,[g(b) - g(a)]$ とおく.

$F(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能であり,
$F(a) = 0$, $F(b) = 0$ である.

ロルの定理から $F'(c) = 0$ となる c が $a < x < b$ にある.

$$0 = F'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) - f'(c)[g(b) - g(a)].$$

ゆえに, $[f(b) - f(a)]g'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)]$ となる c が
$a < x < b$ から見つけられた.

今度は次の式を変形したい.

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)]$$

もし, $g(a) \neq g(b)$ であり, $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 になることがない場合, まず, $g'(c) \neq 0$ になることに注意する.

$g'(c) = 0$ であれば, $0 = f'(c)[g(b) - g(a)]$ なので
$g(a) \neq g(b)$ から $g'(c) = 0$ がわかってしまう.
しかし, これは $f'(x)$ と $g'(x)$ とが同時に 0 にはならないということに矛盾する.

したがって, 両辺を $g'(c)[g(b) - g(a)] \neq 0$ で割れば $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ と書ける. (証明終了)

$f(x)$ および $g(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能とする.
$g(a) \neq g(b)$ であり, $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 になることがないとする.
このとき, 次を満たす c が存在する.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b.$$

$f(t) = \dfrac{1}{2}t^3 - 3t$, $g(t) = 3t - t^3$ とする.

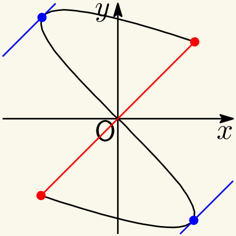
$t = -2$ と $t = 2$ とを結んでみる. $(a = -2,\ b = 2)$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{-2 - 2}{-2 - 2} = \frac{-4}{-4} = 1. \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\frac{3}{2}c^2 - 3}{3 - 3c^2} = \frac{c^2 - 2}{2(1 - c^2)}.$$

$\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = 1$ となるのは

$$\frac{c^2 - 2}{2(1 - c^2)} = 1. \quad c^2 - 2 = 2 - 2c^2.$$

$$3c^2 = 4. \quad \therefore\ c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$



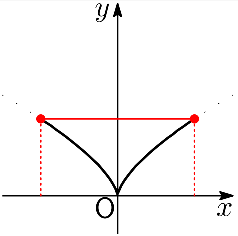
単純に 2 点を結ぶ直線の傾きと同じ接線が作れる，と思ってると，
困ったことも起こる.

$f(t) = t^2$, $g(t) = t^3$ とする.

$t = -1$ と $t = 1$ とを結んでみる. $(a = -1,\ b = 1)$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{1 - 1}{1 - (-1)} = \frac{0}{2} = 0. \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{2c}{3c^2} = \frac{2}{3c}.$$

$\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = 0$ となるところはない.



これは $f'(0) = 0,\ g'(0) = 0$ と
同時に微分が 0 になることがあるため.

本来のコーシーの平均値定理であれば, $c = 0$ として選べばよく.

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = (1 - 1) \times 0 = 0,$$
$$f'(c)[g(b) - g(a)] = 0 \times \{1 - (-1)\} = 0$$

で確かに $[f(b) - f(a)]g'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)]$ は成立している.

3 つの関数バージョンの平均値定理もある (単にロルの定理を用いただけ).

3 つの関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ はすべて
$a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能とする.
このとき, 次を満たす c が存在する.

$$\det \begin{bmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ g(a) & g(b) & g'(c) \\ h(a) & h(b) & h'(c) \end{bmatrix} = 0, \quad a < c < b.$$

なお, $h(x) = 1$ としたものがコーシーの平均値定理である.

$g(x) = x$, $h(x) = 1$ としたものがラグランジュの平均値定理である.

証明は $F(x) = \det \begin{bmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ h(a) & h(b) & h(x) \end{bmatrix}$ についてロルの定理を用いる.