テイラー展開やマクローリン展開のまとめ

鈴木 敏行

神奈川大学

2020 年 4 月 15 日

★ このスライドの転載や再配布などを禁止する.

このスライドは, テイラー展開やマクローリン展開について考える.

その前に: 接線と法線

接線の方程式と法線の方程式を考えることにしよう.
接線というのは, 見た目でいえば接している線であるが,
その点の近くを直線で近似したときの直線のことを接線という.

接線の方程式

$(a, f(a))$ における $y = f(x)$ の接線の方程式は $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

整理したときに $y = Ax + B$ のような形になるようにすること.

法線は接線に直交する直線である.

法線の方程式

$(a, f(a))$ における $y = f(x)$ の法線の方程式は $y = -\dfrac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a)$.
$f'(a) = 0$ のときは, 法線の方程式は $x = a$ である.

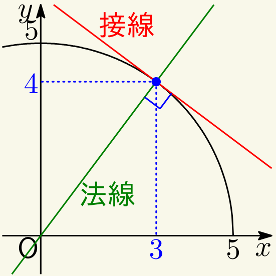
$y = \sqrt{25 - x^2}$ の $(3, 4)$ における接線と法線の方程式.

まず, $(3, 4)$ は $y = \sqrt{25 - x^2}$ 上の点である.

$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ とおくと, $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$. $f'(3) = \dfrac{-3}{\sqrt{25 - 9}} = -\dfrac{3}{4}$.

接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{4}(x - 3) + 4 = -\frac{3}{4}x + \frac{9 + 16}{4} \\ &= -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}. \\ &\therefore\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}. \end{aligned}$$



法線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{4}{3}(x - 3) + 4 = \frac{4}{3}x - 4 + 4 = \frac{4}{3}x. \\ &\therefore\ y = \frac{4}{3}x. \end{aligned}$$

次の曲線上の点 P における接線の方程式および法線の方程式を求めなさい.

(1) $y = x\log x,\ \mathrm{P}(e, e)$.

(2) $y = xe^{x},\ \mathrm{P}(2, 2e^{2})$.

(3) $y = x(2\log x - 1),\ \mathrm{P}(e^{2}, 3e^{2})$.

(4) $y = x\sqrt{2x+1},\ \mathrm{P}(4, 12)$.

(5) $y = \sqrt{x^{2} - 3x + 6},\ \mathrm{P}(2, 2)$.

(6) $y = \sqrt[3]{2x^{3} - 12x + 11},\ \mathrm{P}(1, 1)$.

練習問題の解答 (答えのみ)

(1) 接線 : $y = 2x - e$, 法線 : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{3}$.

(2) 接線 : $y = 3e^2x - 4e^2$, 法線 : $y = -\frac{1}{3e^2}x + 2e^2 + \frac{2}{3e^2}$.

(3) 接線 : $y = 5x - 2e^2$, 法線 : $y = -\frac{1}{5}x + \frac{16}{5}e^2$.

(4) 接線 : $y = \frac{13}{3}x - \frac{16}{3}$, 法線 : $y = -\frac{3}{13}x + \frac{168}{13}$.

(5) 接線 : $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$, 法線 : $y = -4x + 10$.

(6) 接線 : $y = -2x + 3$, 法線 : $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

テイラーの定理

接線の方程式は, 関数を 1 次関数で近似するものであった.
これを多項式関数に一般化したものがテイラーの定理である.

$f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で C^n 級とする.
このとき, 次を満たす c が存在する.

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n, \quad a < c < b.$$

同様にして, a と b をひっくり返したものも成立する.
(証明の方法がほとんど同じなので, 証明は省略する).

$f(x)$ は $b \leqq x \leqq a$ で C^n 級とする.
このとき, 次を満たす c が存在する.

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n, \quad b < c < a.$$

テイラーの定理の証明

2 つの関数を考え, コーシーの平均値定理を何度も使う.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
&= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 - \cdots \\
&\quad - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}, \qquad G(x) = (x-a)^n.
\end{aligned}
$$

まず, $F(a) = 0$, $G(a) = 0$ に注意する.
コーシーの平均値定理から次を満たす c_1 がある.

$$
\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}, \quad a < c_1 < b.
$$

ここで,

$$F'(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}, \quad G'(x) = n(x-a)^{n-1}.$$

特に, $F'(a) = 0$, $G'(a) = 0$ である.
コーシーの平均値定理から次を満たす c_2 がある.

$$\frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F'(c_1) - F'(a)}{G'(c_1) - G'(a)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}, \quad a < c_2 < c_1.$$

以下, これを繰り返していく.

コーシーの平均値定理を n 回用いると,
次を満たす c_n があることがわかる.

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)} = \cdots = \frac{F^{(n)}(c_n)}{G^{(n)}(c_n)},$$
$$a < c_n < \cdots < c_2 < c_1 < b.$$

$F^{(k)}(a) = 0$, $G^{(k)}(a) = 0$ $\left(k = 1, 2, \cdots n-1\right)$ である.

一方, $F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$, $G^{(n)}(x) = n!$.
したがって,

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}. \quad \therefore\ F(b) = \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}G(b) = \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}(b-a)^n.$$

$F(b)$ を書き直すと，

$$
\begin{aligned}
& f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \\
&= f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 - \cdots \\
&\quad - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

$f(b)$ 以外の項を移項することで，テイラーの定理に必要な式が証明できた．(証明終了)

流れがつかめないという人は $n=3$ や $n=4$ の場合に式変形をしっかり書くのをお勧めする．

$n=3$ のとき

$$
F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2, \quad G(x) = (x-a)^3.
$$

テイラーの定理の応用

ある数の近似値を誤差限界を見積もりながら計算することができる.

e の近似値.

テイラーの定理に $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = 1$ とすれば,
次を満たす c があることがわかる.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}, \quad 0 < c < 1.$$

ここで, $1 < e < 3$ は e の定義からわかっている. したがって,

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} < e < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{3}{n!}.$$

試しに $n=5$ とすれば,

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}=\frac{163}{60}=2.71666\ldots,$$
$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{3}{120}=\frac{41}{15}=2.7333\ldots.$$

$e=2.7\ldots$ がわかる.

今度は $n=7$ とすれば,

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}=\frac{685}{252}=2.718253968253968\ldots,$$
$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{3}{5040}=\frac{6851}{2520}=2.718650793650794\ldots.$$

$e=2.718\ldots$ がわかる.

実際, $e=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$ であり,
$e=2.718281828459045\ldots$ が計算できる.

類題

$1.64 < \sqrt{e} < 1.65$ を示しなさい．ただし，$\sqrt{3} < 1.75$ は使ってよい．

テイラーの定理に $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$, $n = 4$ とすれば，

$$e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{e^c}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad 0 < c < \frac{1}{2}.$$

ここで，$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{79}{48}$.

$1 = e^0 < e^c < e^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{2}} < 1.75$ に注意すれば，

$$\frac{79}{48} + \frac{1}{24 \times 16} < \sqrt{e} = \frac{79}{48} + \frac{e^c}{24 \times 16} < \frac{79}{48} + \frac{1.75}{24 \times 16}.$$

これより $\frac{211}{128} < \sqrt{e} < \frac{845}{512}$. 小数に直し，$1.6484375 < \sqrt{e} < 1.650390625$.

以上から $1.64 < \sqrt{e} < 1.65$ がわかった．

テイラーの定理で b が a より大きいか小さいか関係なしに成立するので，これを変数 x に変えることで

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n,$$

となる c が a と x との間にあることがわかる．

c は x によって変化することに注意すること．

ここで，最後の $R_n=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ を剰余項という．

剰余項が充分小さいということがわかれば，充分大きな n に対し

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

と見てもいいということになる．

そこで, 無限級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

を $f(x)$ のテイラー展開もしくはテイラー級数という.

$a = 0$ の場合,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

を $f(x)$ のマクローリン展開もしくはマクローリン級数という.

テイラー: Taylor / マクローリン: Maclaurin

テイラー展開やマクローリン展開が元の $f(x)$ と同じになるのかについては剰余項が充分小さいかを見ないといけない.

さて, もし, 関数 $f(x)$ がマクローリン展開のように

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

と表されたとする. このとき, $f(0) = c_0$.

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + \cdots + nc_n x^{n-1} + \cdots$$

だから $f'(0) = c_1$.

$$f''(x) = 2c_2 x + 6c_3 x + \cdots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \cdots$$

だから $f''(0) = 2c_2$, すなわち $c_2 = \dfrac{f''(0)}{2}$.

$$f'''(x) = 6c_3 + 24c_4 x + \cdots + n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3} + \cdots$$

だから $f'''(0) = 6c_2$, すなわち $c_3 = \dfrac{f'''(0)}{6}$.

以上の計算を考慮すれば, $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ である.

このようにマクローリン展開の係数が単に n 回微分したものだけでなく, $n!$ で割ったものであることには注意してほしい.

具体的な関数のマクローリン展開

(1) $f(x) = e^x$

$f^{(n)}(x) = e^x$ だから, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$.
したがって, マクローリン展開は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + 1x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

これが元の関数 $f(x) = e^x$ と一致するのかについては,
剰余項を見ないといけない.

剰余項は $R_n = \dfrac{e^c}{n!}x^n$ である.

剰余項が十分小さいということを示すのに, 次の事実を使う.

$M>0$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{M^n}{n!}=0.$

$M<N_0$ となる整数 N_0 を考える. $n>N_0$ のとき

$$\begin{aligned}0<\frac{M^n}{n!}&=\frac{M}{n}\times\frac{M}{n-1}\times\cdots\times\frac{M}{N_0+1}\times\frac{M}{N_0}\times\frac{M^{N_0-1}}{(N_0-1)!}\\&<\frac{M}{N_0}\times\frac{M}{N_0}\times\cdots\times\frac{M}{N_0}\times\frac{M}{N_0}\times\frac{M^{N_0-1}}{(N_0-1)!}\\&=\left(\frac{M}{N_0}\right)^{n-N_0}\frac{M^{N_0-1}}{(N_0-1)!}\end{aligned}$$

$\dfrac{M}{N_0}<1$ だから, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{M}{N_0}\right)^{n-N_0}\frac{M^{N_0-1}}{(N_0-1)!}=0.$
はさみうちの原理より 0 に収束することがわかる.

はさみうちの原理 (数列版)

3 つの数列 $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$, $\{c_n\}_n$ に対して $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ であるとする.

もし, a_n と b_n が同じ α に収束するならば, c_n もこの α に収束する.

剰余項 $R_n = \dfrac{e^c}{n!}x^n$ について.

$x > 0$ のとき, $0 < c < x$ だから $e^c < e^x$. $0 \leqq R_n \leqq \dfrac{e^x}{n!}x^n$ で,

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{n!}x^n = 0.$$

はさみうちの原理より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

$x<0$ のとき, $x<c<0$ だから $e^c<e^0=1$. $-\dfrac{1}{n!}|x|^n \leqq R_n \leqq \dfrac{1}{n!}|x|^n$ で,

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n!}|x|^n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}|x|^n = 0.$$

はさみうちの原理より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots.$$

※ e^x のことを $\exp x$ と書くことがある.

(2) $f(x) = \sin x$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & n = 4k, \\ \cos x & n = 4k+1, \\ -\sin x & n = 4k+2, \\ -\cos x & n = 4k+3 \end{cases} \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n = 4k, \\ 1 & n = 4k+1, \\ 0 & n = 4k+2, \\ -1 & n = 4k+3. \end{cases}$$

したがって，マクローリン展開は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

剰余項は $R_n = \dfrac{1}{n!}x^n \sin\left(c + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ である.

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より $-\dfrac{1}{n!}|x|^n \leqq R_n \leqq \dfrac{1}{n!}|x|^n$ であり,

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n!}|x|^n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}|x|^n = 0.$$

はさみうちの原理より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots .\end{aligned}$$

(3) $f(x) = \cos x$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & n = 4k, \\ -\sin x & n = 4k+1, \\ -\cos x & n = 4k+2, \\ \sin x & n = 4k+3 \end{cases} \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & n = 4k, \\ 0 & n = 4k+1, \\ -1 & n = 4k+2, \\ 0 & n = 4k+3. \end{cases}$$

したがって，マクローリン展開は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots .$$

剰余項は $R_n = \dfrac{1}{n!}x^n \cos\left(c + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ である.

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より $-\dfrac{1}{n!}|x|^n \leqq R_n \leqq \dfrac{1}{n!}|x|^n$ であり,

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n!}|x|^n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}|x|^n = 0.$$

はさみうちの原理より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots.$$

オイラーの等式

マクロ―リン展開することの一番の重要な点は, x に代入するものを一般的な数にしてもよいということである.

正当化はさておき e^x のマクローリン展開の式に
x に yi ($i = \sqrt{-1}$ は虚数単位) を代入してしまおう.

$$
\begin{aligned}
e^{yi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(yi)^n \\
&= 1 + yi + \frac{1}{2}(-y^2) + \frac{1}{6}(-iy^3) + \frac{1}{4!}y^4 + \frac{1}{5!}y^5 i \\
&+ \frac{1}{6!}(-y^6) + \frac{1}{7!}(-iy^7) + \cdots
\end{aligned}
$$

次に注意しよう: $i^n = \begin{cases} 1 & n = 4k, \\ i & n = 4k+1, \\ -1 & n = 4k+2, \\ -i & n = 4k+3 \end{cases} = \begin{cases} (-1)^{\ell} & n = 2\ell, \\ (-1)^{\ell} i & n = 2\ell + 1. \end{cases}$

先ほどのマクローリン展開を i がついていない項と i がついている項とで振り分ければ

$$e^{yi} = \left[1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \frac{1}{6!}y^6 + \cdots + \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!}y^{2\ell} + \cdots\right] + i\left[y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \frac{1}{7!}y^7 + \cdots + \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!}y^{2\ell+1} + \cdots\right]$$

それぞれが $\cos y$, $\sin y$ のマクローリン展開に一致しているので, 次の等式が得られた.

オイラーの等式 (公式)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

この公式は便利なので, 使える機会があったらどんどん使ってほしい.

(4) $f(x) = \log(1+x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$ であり，一般的に

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ $(n = 1, 2, \ldots)$ である．したがって，マクローリン展開は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$
$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \cdots .$$

剰余項を小さくするという作業は大変であり, 実は $-1 < x < 1$ でなければいけない.

GIF 動画: `http://t21suzuki.html.xdomain.jp/miscellaneous/Maclaurin.html`

剰余項は一般に次のような表し方もある.

- ラグランジュの剰余項 (従来): $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$.
- ベルヌーイの剰余項 (積分形): $R_n = \displaystyle\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\,dt$.
- コーシーの剰余項: $R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-a)(x-c)^{n-1}$.

例題

応用上は無限級数ではなく，有限個の項で止めることが多い．
$\cdots$ 無限に足すのは現実的ではない．

(1) $f(x) = \sqrt{1+x}$ の 3 次までのマクローリン展開

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{\frac{1}{2}} & f(0) &= 1 & c_0 &= \frac{1}{0!} \times 1 = 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} & f'(0) &= \frac{1}{2} & c_1 &= \frac{1}{1!} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
f''(x) &= \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}} & & & & \\
&= -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} & f''(0) &= -\frac{1}{4} & c_2 &= \frac{1}{2!} \times -\frac{1}{4} = -\frac{1}{8} \\
f'''(x) &= -\frac{1}{4} \times -\frac{3}{2}(1+x)^{-\frac{5}{2}} & & & & \\
&= \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} & f'''(0) &= \frac{3}{8} & c_3 &= \frac{1}{3!} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

以上から, 3 次までのマクローリン展開は

$$\begin{aligned} & f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3 \\ &= c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3. \end{aligned}$$

n 次までのマクローリン展開 [マクローリン級数を n 次の項まで] を求めるには,

1. n 回微分する
2. 0 のときの値を求める
3. $k!$ で割る (k は微分した回数)
4. これで出てきた数が x^k の係数である.

(2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の 3 次までのマクローリン展開

$$f(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \qquad f(0) = 1 \qquad c_0 = \frac{1}{0!} \times 1 = 1$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}(-1) \\ &= \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \qquad f'(0) = \frac{1}{2} \qquad c_1 = \frac{1}{1!} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2} \times -\frac{3}{2}(1-x)^{-\frac{5}{2}}(-1) \\ &= \frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned} \qquad f''(0) = \frac{3}{4} \qquad c_2 = \frac{1}{2!} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{3}{4} \times -\frac{5}{2}(1-x)^{-\frac{7}{2}}(-1) \\ &= \frac{15}{8}(1-x)^{-\frac{7}{2}} \end{aligned} \qquad f'''(0) = \frac{15}{8} \qquad c_3 = \frac{1}{3!} \times \frac{15}{8} = \frac{5}{16}$$

以上から, 3 次までのマクローリン展開は

$$\begin{aligned} & f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 \\ &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3. \end{aligned}$$

練習問題

次の関数のマクローリン級数を 3 次まで求めなさい.

(1) $f(x) = \sqrt{1-2x}$ (2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$ (3) $f(x) = \tan x$

(4) $f(x) = \dfrac{2}{1+e^x}$ (5) $f(x) = e^x \cos x$ (6) $f(x) = e^{-x} \sin x$

練習問題の解答 (答えのみ)

(1) $1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3$　(2) $1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x^3$　(3) $x + \frac{1}{3}x^3$

(4) $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^3$　(5) $1 + x - \frac{1}{3}x^3$　(6) $x - x^2 + \frac{1}{3}x^3$

おまけ

$f(x)$ のマクローリン展開が次の通りに与えられたとしよう

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots .$$

このとき, $f'(x)$ および $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ のマクローリン展開はそれぞれ

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n \\ &= c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots + n c_n x^{n-1} + (n+1) c_{n+1} x^n + \cdots . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)\,dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} \\ &= c_0 x + \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{c_{n-1}}{n} x^n + \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots . \end{aligned}$$

また, $f(x)$ および $g(x)$ のマクローリン展開が

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots ,$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

とき, $f(x)g(x)$ のマクローリン展開は

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\sum_{r=0}^{n} a_{n-r} b_r \Bigr) x^n \\ &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + \cdots \\ &\quad + (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_{n-r} b_r + \cdots + a_0 b_n) x^n + \cdots . \end{aligned}$$

無限級数なので, 本来は項の足す順番を換えたり, 微分積分をしてしまうのは危険な作業なのだが, 気にせず, 有限次の多項式と同じようにやってよいことが知られている.

逆に, マクローリン展開が

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

となるような関数 $f(x)$ を考えることができる.
ただし, 無限項の和なので収束するのかわからない.

そこで, 次のような方法で収束する x の範囲を調べることができる.

ダランベールの方法

$L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ が収束するとする.

このとき, $|x| < \frac{1}{L}$ であれば収束する (関数として意味を持つ).

コーシーの方法

$L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ が収束するとする.

このとき, $|x| < \frac{1}{L}$ であれば収束する (関数として意味を持つ).

ただし, $\frac{1}{0} = \infty$ と解釈し, このときはすべての x で収束するといえる.

この $\frac{1}{L}$ で計算できる数を収束半径という.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$ の収束半径

ダランベールの方法を用いて計算する. $c_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ なので,

$$
\begin{aligned}
\frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n+1)n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot (n+1)n(n-1)\cdots 2\cdot 1} \\
&\times \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(2n)(2n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{2(2+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}}.
\end{aligned}
$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2(2+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2\times 2}{1} = 4.$$

したがって, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{L} = \dfrac{1}{4}$ である.