

ロピタルの定理のまとめ

鈴木 敏行

神奈川大学

2020 年 4 月 20 日

★ このスライドの転載や再配布などを禁止する.

このスライドは,

- 不定形の極限值
- ロピタルの定理 ($0/0$ バージョン)
- ロピタルの定理 (∞/∞ バージョン)
- ロピタルの定理をあまり使いすぎないでほしいケース

についてまとめたものである. また, おまけとして次を追加している.

- 統一的な平均値の見方 (不定形の極限値の計算が必要)

極限値の性質として,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{x^2 - 2x - 3}$$

分子分母ともに多項式だから

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 6x + 5) = 1 - 6 + 5 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x - 3) = 1 - 2 - 3 = -4 \neq 0.$$

したがって,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{x^2 - 2x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 6x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x - 3)} = \frac{0}{-4} = 0.$$

分母の極限值が0になった場合は、収束しないことがある.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

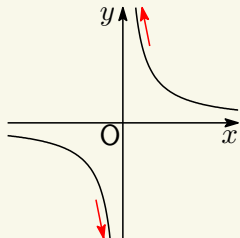
分子: $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, 分母: $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ に注意する.

グラフで示す通り,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

右極限と左極限が一致しないので、収束しない(発散・振動).



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

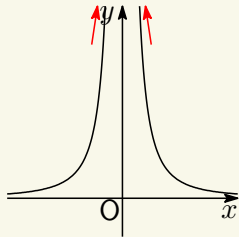
分子: $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, 分母: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ に注意する.

グラフで示す通り,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

右極限と左極限が同じ $+\infty$ となる. 収束せず発散しているが, 正の無限大に発散していることが言える.



一方, 分母だけでなく, 分子の極限值も 0 だった場合はどうなるだろうか.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{cx}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} cx = c \times 0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0. \quad \text{しかし, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{cx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} c = c.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0. \quad \text{しかし, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

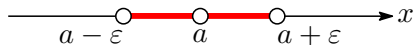
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0. \quad \text{しかし, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}x^3 = 0.$$

このように、分母分子の極限值からでは、分数式になった関数の極限値が求められない状況を不定形という。

不定形となった場合, そのままでは極限值がどうなるのか定まらない.
その場合に極限値の計算を少しでも楽する方法を考えた定理が
次のロピタルの定理である.

以下でいう $x = a$ の近くでいう x には $x = a$ を含んでいないものとする.



ロピタルの定理 (L'Hospital)

$x = a$ の近くで微分可能な 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に次の 4 条件を課す.

(1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

(2) $g(x)$ が $x = a$ の近くで 0 でない.

(3) $f'(x)$ と $g'(x)$ とが同時に 0 にならない.

(4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ が確定する ($L = \pm\infty$ も含む).

このとき, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

定理の主張では, 通常 of 極限值を考えているが, 片側極限であっても成立する. 実際, 証明は片側極限の場合を考える.

準備: コーシーの平均値定理

$f(x)$ および $g(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能とする.
 $g(a) \neq g(b)$ であり, $f'(x)$ と $g'(x)$ が同時に 0 になることがないとする.
このとき, 次を満たす c が存在する.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b.$$

証明

$f(a) = 0, g(a) = 0$ と定めれば, $f(x), g(x)$ とともに $a \leq x \leq a + \varepsilon$ で連続,
 $a < x < a + \varepsilon$ で微分可能である [条件 (1)].

ここで, コーシーの平均値定理から

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}, \quad a < c_x < x (\leq a + \varepsilon)$$

となる c_x が存在する [条件 (2)(3)].

ここで, 仮定 [条件 (4)] から

$$\lim_{c \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L.$$

$x \rightarrow a+0$ のとき, もちろん $c_x \rightarrow a+0$ だから

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = L.$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = L \quad (\text{証明終了}).$$

条件 (2)(3) については, 特に

$g'(x)$ が $x = a$ の近くで 0 でない.

と解釈してもよいだろう.

使いやすい形のロピタルの定理

$x = a$ の近くで微分可能な 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に次の 3 条件を課す.

(1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

(2) $g'(x)$ が $x = a$ の近くで 0 でない.

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ が確定する ($L = \pm\infty$ も含む).

このとき, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

覚えるのであれば, こちらの方で充分であろう.

例題

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1}$$

分子 : $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x^2 + 2) = 1 - 3 + 2 = 0$, 分母 : $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 1 - 1 = 0$.

次に,

$$\text{分子 : } (x^3 - 3x^2 + 2)' = 3x^2 - 6x, \quad \text{分母 : } (x^2 - 1)' = 2x$$

であり, 分母の導関数は $x = 1$ の近くでは 0 でない. また,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x}{2x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 6x)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x)} = \frac{3 - 6}{2} = -\frac{3}{2}.$$

以上から, ロピタルの定理により, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1} = -\frac{3}{2}.$

以上の例を略記すれば,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1} \underset{\substack{\text{ロピ} \\ \text{タル}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 3x^2 + 2)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x}{2x} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}.$$

$\begin{matrix} 1-3+2=0 \\ \uparrow \\ 1-1=0 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 3-6=-3 \\ \uparrow \\ 2 \neq 0 \end{matrix}$

もっと略記して

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 3x^2 + 2)'}{(x^2 - 1)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x}{2x} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$\rightarrow 1 - 3 + 2 = 0$
 $\rightarrow 1 - 1 = 0$
 $\rightarrow 3 - 6 = -3$
 $\rightarrow 2 \neq 0$

条件チェックは欠かさないように.

ときどき、次のような間違い方をする人がある。

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 5}{x^2 - x - 2} \quad (\text{間違った解法})$$

ロピタルの定理より、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 5}{x^2 - x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 6x^2 + 5)'}{(x^2 - x - 2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 12x}{2x - 1} = \frac{3 - 12}{2 - 1} = -9. \end{aligned}$$

不定形になっているかの確認を忘れないで!!!

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 5}{x^2 - x - 2} &\quad \begin{array}{l} \rightarrow 1 - 6 + 5 = 0 \\ \rightarrow 1 - 1 - 2 = -2 \end{array} \quad \Leftarrow \text{不定形じゃない (分母見て)!} \\ = \frac{0}{-2} &= 0. \end{aligned}$$

ちなみに、条件が揃っていれば、何度もロピタルの定理が使える.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x - \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2 \rightarrow 0}{x - \sin x \rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2)'}{(x - \sin x)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 2 - 4x \rightarrow 0}{1 - \cos x \rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2e^{2x} - 2 - 4x)'}{(1 - \cos x)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x} - 4 \rightarrow 0}{\sin x \rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4e^{2x} - 4)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8e^{2x} \rightarrow 8}{\cos x \rightarrow 1} = \frac{8}{1} = 8.$$

※ $e^0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ に注意.

次の極限值を求めなさい.

$$\begin{array}{lll} (1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 5} & (2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^4 - 4x^2 + 3} & (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^x - 3 - 2x}{x^2 + 4x} \\ (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{e^{3x} - 1 - 3x} & (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{1 - x}} & (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{1 - \cos x} \end{array}$$

※ 解答 (答えのみ) は p 29 にまとめておきます.

a が $\pm\infty$ の場合もある.

$x > c$ で微分可能な 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に次の 3 条件を課す. c は適当な数でよい.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

(2) $g'(x)$ が $x > c$ で 0 でない.

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ が確定する } (L = \pm\infty \text{ も含む}).$$

$$\text{このとき, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

上の極限で $x \rightarrow +\infty$ を $x \rightarrow -\infty$ としたバージョンにするなら, 微分可能性などの条件を $x > c$ ではなく $x < c$ としておく必要がある.

$F(x) = f(\frac{1}{x})$, $G(x) = g(\frac{1}{x})$ とおけば,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(\frac{1}{x})}{g(\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{F(x)}{G(x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^2} g'(\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

通常のロピタルの定理が $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{F(x)}{G(x)}$ に利用できる.

元々の分子分母の極限值が $\pm\infty$ である場合もある.

$x = a$ の近くで微分可能な 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に次の 3 条件を課す.

(1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ (複号は怎么选んでも構わない).

(2) $g'(x)$ が $x = a$ の近くで 0 でない.

(3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ が確定する ($L = \pm\infty$ も含む).

このとき, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

もちろん, 片側極限の場合でも成立する.

証明は面倒なので省略する.

a も極限值も無限大の場合でも差し支えない.

$x > c$ で微分可能な 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に次の 3 条件を課す. c は適当な数でよい.

(1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ (複号はどう選んでも構わない).

(2) $g'(x)$ が $x > c$ で 0 でない.

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ が確定する ($L = \pm\infty$ も含む).

このとき, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log x$$

まず, $\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{x^{-2}}$ だから

分子: $\lim_{x \rightarrow +0} \log x = -\infty$, 分母: $\lim_{x \rightarrow +0} x^{-2} = +\infty$. $\Leftarrow$ 不定形!

次に,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x} \times x^3}{-2x^{-3} \times x^3} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2}{-2} = \frac{0}{-2} = 0.$$

したがって, ロピタルの定理から, 元の極限值も 0 となることがわかる.

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log x = 0$$

一般に, $\lim_{x \rightarrow +0} x^a \log x = 0$ ($a > 0$) が成立する.

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-2x}$$

まず, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$ だから

分子: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, 分母: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$. $\Leftarrow$ 不定形!

次に, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^{2x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2e^{2x}}$ であって,

分子: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$, 分母: $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{2x} = +\infty$. $\Leftarrow$ 不定形!

さらに, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(2e^{2x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} e^{-2x} = 0$.

したがって, ロピタルの定理から,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2e^{2x}} = 0. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = 0.$$

ゆえに, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-2x} = 0$

以上の計算は, 次のように略記してもよい.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-2x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \rightarrow +\infty}{e^{2x} \rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^{2x})'} \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \rightarrow +\infty}{2e^{2x} \rightarrow +\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(2e^{2x})'} \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \rightarrow 2}{4e^{2x} \rightarrow +\infty} = \frac{2}{\infty} = 0. \quad \frac{1}{\infty} = 0 \text{ と解釈する.}\end{aligned}$$

一般に, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a e^{-bx} = 0$ ($a > 0, b > 0$) が成立する.

次の極限値を求めなさい.

$$(7) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log(\sin 2x)}{\log x^3} \quad (8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^{2x} + 3)}{x + 4} \quad (9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^3 + 1)}{\log(x + 1)}$$

※ 解答 (答えのみ) は p 29 にまとめておきます.

ロピタルの定理をあまり使わない方がいい場合

ロピタルの定理を使ってしまうと計算ができなくなる場合もある。

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x}$$

ロピタルの定理を1度使おうとすると,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1} \rightarrow +\infty}{2^x + 3^x \rightarrow +\infty} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2^{x+1} + 3^{x+1})'}{(2^x + 3^x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} \log 2 + 3^{x+1} \log 3 \rightarrow +\infty}{2^x \log 2 + 3^x \log 3 \rightarrow +\infty}. \end{aligned}$$

これを繰り返すと $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1}(\log 2)^n + 3^{x+1}(\log 3)^n}{2^x(\log 2)^n + 3^x(\log 3)^n}$ となり, 計算が進む見込みがない.

このような場合, 底が一番大きい指数関数で分母分子を割ってしまおう.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2^{x+1} + 3^{x+1}) \div 3^x}{(2^x + 3^x) \div 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1} \\ &= \frac{2 \times 0 + 3}{0 + 1} = 2. \end{aligned}$$

指数法則 $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, および $0 < a < 1$ のとき $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ に注意しよう.

$x \rightarrow -\infty$ のときは逆になるので注意すること.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(2^x + 3^x)}{x}$$

考える極限値の分母と分子の関数はともに正の無限大に発散している.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\log(2^x + 3^x)]'}{(x)'} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^x \log 2 + 3^x \log 3}{2^x + 3^x}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \log 2 + 3^x \log 3}{2^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2^x \log 2 + 3^x \log 3) \div 3^x}{(2^x + 3^x) \div 3^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x \log 2 + \log 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1} = \frac{0 \log 2 + \log 3}{0 + 1} = \log 3. \end{aligned}$$

ロピタルの定理から

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(2^x + 3^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\log(2^x + 3^x)]'}{(x)'} = \log 3.$$

次の極限値を求めなさい.

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+2} + 4^{x+1}}{3^x - 4^x}$$

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+2} - 2^{x+3}}{2^{x+1} + 3^{x+1}}$$

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^{4x} + 4e^x)}{x + 2}$$

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(2^{2x} + 3^x)}{3x + 2}$$

※ 解答 (答えのみ) は p 29 にまとめておきます.

p 16 の練習問題 (通常のロピタルの定理に対する問題)

$$(1) \frac{1}{2} \quad (2) 0 \quad (3) \frac{1}{4} \quad (4) \frac{9}{25} \quad (5) 2 \quad (6) -1$$

p 24 の練習問題 (変形版のロピタルの定理に対する問題)

$$(7) \frac{1}{3} \quad (8) 2 \quad (9) 3$$

p 28 の練習問題 (ロピタルの定理をあまり使わない方がいい問題)

$$(10) -4 \quad (11) 3 \quad (12) 4 \quad (13) \frac{2}{3} \log 2$$

$a > 0, b > 0$ の平均には

- 相加平均: $\frac{a+b}{2}$. arithmetic mean
- 相乗平均: $\sqrt{ab}$. geometric mean
- 調和平均: $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$. harmonic mean

などあるが, これらはまとめて $f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ と表される.

$a = b$ であれば $f(x) = a$ に注意する.

実際, $f(1)$ が相加平均, $f(-1)$ が調和平均であり,
 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ が相乗平均である.

ロピタルの定理を用いれば,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \log\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(a^x + b^x) - \log 2}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\log(a^x + b^x) - \log 2]'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x}}{1} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x} \\&= \frac{\log a + \log b}{1 + 1} = \frac{1}{2} \log(ab) = \log \sqrt{ab}.\end{aligned}$$

ゆえに, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}.$

今度は $x \rightarrow \pm\infty$ の極限值を考えてみる. $a > b$ と仮定する.

$a > 1$ とする.

$$\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = +\infty, \quad \frac{b}{a} > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^x = 0.$$

したがって,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \log\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(a^x + b^x) - \log 2}{x} \quad \begin{matrix} \rightarrow +\infty \\ \rightarrow +\infty \end{matrix} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\log(a^x + b^x) - \log 2]'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^x \log a + b^x \log b) \div a^x}{(a^x + b^x) \div a^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log a + \left(\frac{b}{a}\right)^x \log b}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^x} = \frac{\log a + 0}{1 + 0} = \log a, \end{aligned}$$

※ $a < 1$ のとき, はじめの分子の極限が $-\infty$ になることに注意.

※ $a = 1$ のとき, はじめの分子の極限值が $-\log 2$ になることに注意.

$b < 1$ とする.

$$\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = 0, \quad \frac{b}{a} > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^x = +\infty.$$

したがって,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \log\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(a^x + b^x) - \log 2}{x} \xrightarrow{+\infty} \rightarrow +\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[\log(a^x + b^x) - \log 2]'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a^x \log a + b^x \log b) \div b^x}{(a^x + b^x) \div b^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x \log a + \log b}{\left(\frac{a}{b}\right)^x + 1} = \frac{0 + \log b}{0 + 1} = \log b, \end{aligned}$$

※ $b > 1$ のとき, はじめの分子の極限が $-\infty$ になることに注意.

※ $b = 1$ のとき, はじめの分子の極限值が $-\log 2$ になることに注意.

したがって、一般に $a > 0, b > 0$ のとき,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \max\{a, b\}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \min\{a, b\}.$$

$f(x)$ はどうやら単調増加なのではないかと考えられる. 実際, $a \neq b$ のとき, $f'(x) > 0$ が証明できる.

一般に, $a_1, a_2, \dots, a_n$ がすべて正の数であるとき,
次が成立することが知られている.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} &= \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} &= \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \end{aligned}$$