

# 1 変数関数の極値のまとめ

鈴木 敏行

神奈川大学

2020 年 4 月 24 日

★ このスライドの転載や再配布などを禁止する.

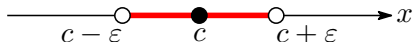
このスライドは,

- 極大と極小
- 増減表を用いた極値を調べる方法
- 2階導関数を用いた極値を調べる方法

についてまとめたものである.

# 最大と最小/極大と極小

$c$  の近くとは, 適当に小さい  $\varepsilon > 0$  を用いて範囲  $c - \varepsilon < x < c + \varepsilon$  のこと.



関数  $f(x)$  の定義域を  $I$  とする.  $x \in I$  とは  $I$  にある数  $x$  を表す.

- $f(x)$  が  $x = a$  で最大であるとは

$$x \in I \Rightarrow f(x) \leq f(a).$$

- $f(x)$  が  $x = a$  で最小であるとは

$$x \in I \Rightarrow f(x) \geq f(a).$$

- $f(x)$  が  $x = a$  で (狭義の) 極大であるとは

$$x \in I \text{ は } a \text{ の近くで } x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a).$$

- $f(x)$  が  $x = a$  で (狭義の) 極小であるとは

$$x \in I \text{ は } a \text{ の近くで } x \neq a \Rightarrow f(x) > f(a).$$

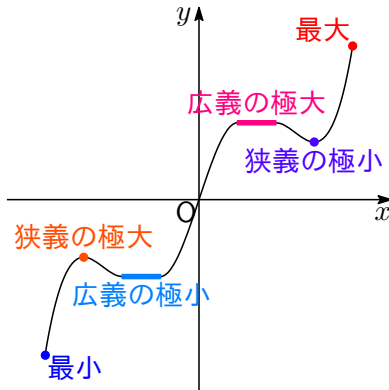
- $f(x)$  が  $x = a$  で (広義の) 極大であるとは

$$x \in I \text{ は } a \text{ の近く} \Rightarrow f(x) \leq f(a).$$

- $f(x)$  が  $x = a$  で (広義の) 極小であるとは

$$x \in I \text{ は } a \text{ の近く} \Rightarrow f(x) \geq f(a).$$

最大や極大については、次の図が参考になるのではと思われる.



極大と最大の微妙な違いについてだが、例えば …

- 東京都で一番高い山: 雲取山 (2017m)
- 神奈川県一番高い山: 蛭ヶ岳 (1673m)
- 日本で一番高い山: 富士山 (3776m)
- 世界で一番高い山: エベレスト (8848m)

地球全体から考えれば、富士山はたいして高い山ではない。  
局所的に考えたところで高いだけに過ぎない。

局所的な最大が極大ということ。ただし、極大は最大の候補になる。

**注意:** 定義域の端では極大や極小は考えないものとする。

ところで、山の頂上に

- たどり着くにはひたすら登り続けなければならない。
- たどり着いた後はひたすら降り続けなければならない。



連続関数の場合には

**極大**: そこに至るまで増加し、その先は減少する。

**極小**: そこに至るまで減少し、その先は増加する。

したがって、関数の増減を調べれば、極大極小を調べることができる。

### 補足: 用語について

$x = a$  で  $f(x)$  が

○ **極大**になるとき、場所  $a$  を**極大点**, 値  $f(a)$  を**極大値**という。

○ **極小**になるとき、場所  $a$  を**極小点**, 値  $f(a)$  を**極小値**という。

**極大値**, **極小値**をまとめて**極値**という。

- $f(x)$  が狭義単調増加であるとは

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- $f(x)$  が狭義単調減少であるとは

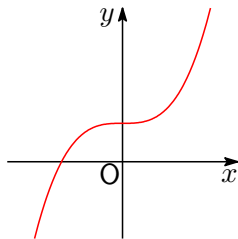
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

- $f(x)$  が (広義) 単調増加であるとは

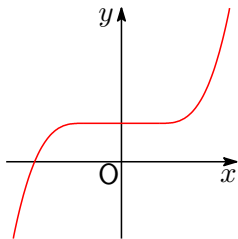
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

- $f(x)$  が (広義) 単調減少であるとは

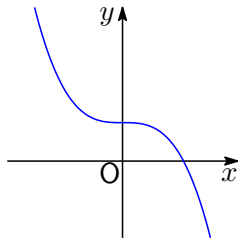
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$



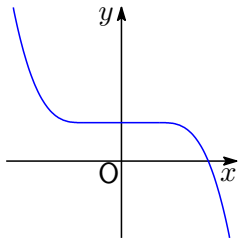
狭義単調増加



広義単調増加



狭義単調減少



広義単調減少



このとき、次の事実が重要である.

## 微分と増減その1

$f(x)$  は  $a \leq x \leq b$  で連続,  $a < x < b$  で微分可能であるとする.

(1)  $f'(x) > 0$  ならば  $f(x)$  は狭義単調増加である.

(2)  $f'(x) < 0$  ならば  $f(x)$  は狭義単調減少である.

一方で、逆については注意が必要である.

## 微分と増減その2

$f(x)$  は  $a \leq x \leq b$  で連続,  $a < x < b$  で微分可能であるとする.

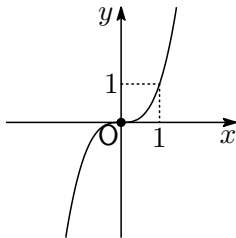
(1)  $f(x)$  が単調増加ならば  $f'(x) \geq 0$ .

(2)  $f(x)$  が単調減少ならば  $f'(x) \leq 0$ .

狭義単調増加であっても  $f'(a) = 0$  となることがあることには注意.

例  $f(x) = x^3$

これは狭義単調増加な関数だが,  
 $f'(0) = 0$  になっている.



## 微分と増減その1の証明

(1)  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$  ととする.

このとき, (ラグランジュの) 中間値の定理から, 次をみたす  $c$  がある.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2.$$

仮定より  $f'(c) > 0$ .  $x_2 - x_1 > 0$  だから  $f(x_2) - f(x_1) > 0$  がいえる.  
 $x_1 < x_2$  ならば  $f(x_1) < f(x_2)$  が言えたので, 狭義単調増加がわかる.

(2) は  $f'(c)$  の符号が逆になって大小関係が逆になることに注意すれば  
同じく証明できる.

## 微分と増減その2の証明

(1)  $a < x < b$  とする.

$h > 0$  ならば  $f(x) < f(x+h)$  なので,  $f(x+h) - f(x) > 0$ .

したがって,  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$  である (分母も分子も +).

$h < 0$  ならば  $f(x+h) < f(x)$  なので,  $f(x+h) - f(x) < 0$ .

したがって,  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$  である (分母も分子も -).

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0. \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

(2) は大小関係が逆になって符号が逆になることに注意すれば  
同じく証明できる.

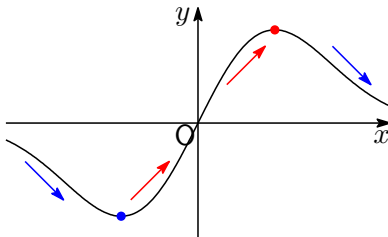
## これまでのまとめ

**極大**は増加から減少に変わる場所である。

**極小**は減少から増加に変わる場所である。

$f'(x) > 0$  ならば狭義単調増加,  $f'(x) < 0$  ならば狭義単調減少である。

したがって,  $f'(x)$  の符号が変わるところで極大や極小になる。

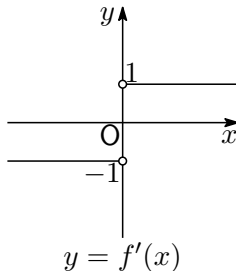
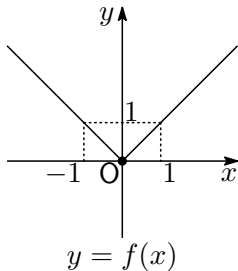


ただし,  $f'(x)$  が存在しない場合も考えられる。

例:  $f(x) = |x|$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

$f'(0)$  は存在しないが,  $f(x)$  は  $x = 0$  で極小になっている.



一方で、次も成立する.

$f(x)$  が  $x = a$  で極値をとり,  $x = a$  で微分可能ならば,  $f'(a) = 0$

証明:  $x = a$  で極大であるとする.

$h > 0$  ならば  $f(a) > f(a + h)$  なので,  $f(a + h) - f(a) < 0$ .

$$\therefore f'(a) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \leq 0. \quad (\text{分母: } +, \text{分子: } -).$$

$h < 0$  ならば  $f(x + h) < f(x)$  なので,  $f(x + h) - f(x) < 0$ .

$$\therefore f'(a) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \geq 0. \quad (\text{分母: } -, \text{分子: } -).$$

以上から  $f'(a) = 0$ .

極小の場合も符号が逆になる点に注意すれば同じく証明できる.

当然だが、次は誤りである.

$f'(a) = 0$  ならば  $f(x)$  は  $x = a$  で必ず極値をとる

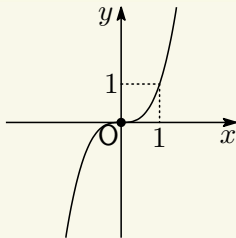
例:  $f(x) = x^3$

$f(x)$  は狭義単調増加である.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$$

しかし、 $f'(x) = 3x^2$  だから、 $f'(0) = 0$  である.

$x = 0$  では極大でも極小でもない.



これらのことに注意すると、 $f(x)$  の極値をとる候補は

- $f'(x) = 0$  になるところ
  - $f'(x)$  が存在しないところ
- になる.



$$f(x) = |x|\sqrt{x+3}$$

定義域は  $x \geq -3$ .

$$f'(x) = \frac{-3(x+2)}{2\sqrt{x+3}} \quad (-3 < x < 0), \quad f'(x) = \frac{-3(x+2)}{2\sqrt{x+3}} \quad (x > 0) \text{ である.}$$

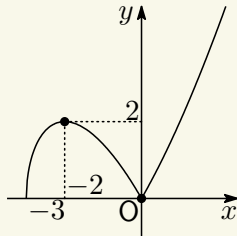
例えば,  $x > 0$  のとき  $f(x) = x\sqrt{x+3}$  なので

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' \sqrt{x+3} + x(\sqrt{x+3})' = \sqrt{x+3} + x \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \\ &= \frac{2(x+3) + x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}. \end{aligned}$$

したがって,  $f'(x)$  の符号は

- $-3 < x < -2$  のとき + (この範囲で単調増加)
- $-2 < x < 0$  のとき - (この範囲で単調減少)
- $x > 0$  のとき + (この範囲で単調増加)

以上より,  $x = -2$  のとき極大,  $x = 0$  のとき極小.



※  $x = -3$  は定義域の端なので  $x = -3$  のとき極小とは言わない.

関数の増減をまとめた表が増減表というものである.

$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 8$  を例としてやってみる.

(1)  $f'(x)$  を求める.

$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x^2 - 4x + 3).$$

(2)  $f'(x)$  の符号が入れ替わる場所を探す.

$f'(x)$  が 0 になる場所だけでなく, そもそも存在しない場所も考える.

$f'(x)$  はすべての  $x$  について存在する.

$f'(x) = 0$  を解けば,  $12x(x^2 - 4x + 3) = 0$  なので  $12x(x - 1)(x - 3) = 0$ ,  
すなわち  $x = 0, 1, 3$ .

ここからは表を作る作業である．枠をがちがちに書く必要はない．

(3) それを小さい方から順次並べていく．定義域の両端がある場合も記入すること．

|         |         |   |         |   |         |   |         |
|---------|---------|---|---------|---|---------|---|---------|
| $x$     | $\dots$ | 0 | $\dots$ | 1 | $\dots$ | 3 | $\dots$ |
| $f'(x)$ |         | 0 |         | 0 |         | 0 |         |
| $f(x)$  |         |   |         |   |         |   |         |

(4) 並べた数の間の  $f'(x)$  の符号を調べて記入する．

$f'(x)$  が連続関数であれば，間の数を 1 つ代入してみればよい．

＋と－がいつも交互に来るとは限らないので，注意して調べること．

|         |         |   |         |   |         |   |         |
|---------|---------|---|---------|---|---------|---|---------|
| $x$     | $\dots$ | 0 | $\dots$ | 1 | $\dots$ | 3 | $\dots$ |
| $f'(x)$ | $-$     | 0 | $+$     | 0 | $-$     | 0 | $+$     |
| $f(x)$  |         |   |         |   |         |   |         |

(5) 増減を入れる. それぞれ  $f(x)$  に記入する.

$f'(x)$  が  $+$  のところは増加だから  $\nearrow$ ,  $f'(x)$  が  $-$  のところは減少だから  $\searrow$ .

|         |            |   |            |   |            |   |            |
|---------|------------|---|------------|---|------------|---|------------|
| $x$     | $\dots$    | 0 | $\dots$    | 1 | $\dots$    | 3 | $\dots$    |
| $f'(x)$ | $-$        | 0 | $+$        | 0 | $-$        | 0 | $+$        |
| $f(x)$  | $\searrow$ |   | $\nearrow$ |   | $\searrow$ |   | $\nearrow$ |

(6) 極大極小の判定

減少 ( $\searrow$ ) から増加 ( $\nearrow$ ) に変わっているところが極小

増加 ( $\nearrow$ ) から減少 ( $\searrow$ ) に変わっているところが極大

|         |            |    |            |    |            |    |            |
|---------|------------|----|------------|----|------------|----|------------|
| $x$     | $\dots$    | 0  | $\dots$    | 1  | $\dots$    | 3  | $\dots$    |
| $f'(x)$ | $-$        | 0  | $+$        | 0  | $-$        | 0  | $+$        |
| $f(x)$  | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ |

(7) 値を求め、答えをまとめればよい.

$$x = 0 \text{ (極小となる) } f(0) = 8.$$

$$x = 1 \text{ (極大となる) } f(1) = 3 - 16 + 18 + 8 = 29 - 16 = 13.$$

$$x = 3 \text{ (極小となる) } f(3) = 243 - 432 + 162 + 8 = 413 - 432 = -19.$$

### 解答その1

極大値: 13 ( $x = 1$  のとき).

極小値: 8 ( $x = 0$  のとき),  $-19$  ( $x = 3$  のとき).

### 解答その2

$x = 0$  のとき極小値 8.  $x = 1$  のとき極大値 13.  $x = 3$  のとき極小値  $-19$ .

### 解答その3

極大値  $f(1) = 13$ . 極小値  $f(0) = 8$ ,  $f(3) = -19$ .

極大値や極小値を答えるときに、値そのものだけでなく、どこでとる値なのかも明記する必要がある.

## 例題

$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$  の極値を求めなさい

まず、導関数を求める.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)'(x^2+3) - (x-1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \frac{1(x^2+3) - (x-1)2x}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2} = \frac{-(x^2-2x-3)}{(x^2+3)^2} = \frac{-(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}. \end{aligned}$$

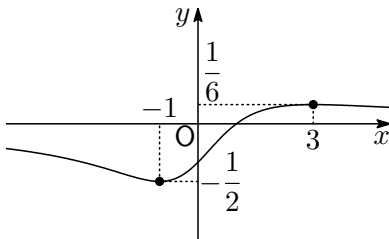
導関数は連続関数で、微分できない  $x$  はなく、 $f'(x) = 0$  となる  $x$  は  $x = -1, 3$  である. 増減表は次のとおり.

|         |            |      |            |     |            |
|---------|------------|------|------------|-----|------------|
| $x$     | $\dots$    | $-1$ | $\dots$    | $3$ | $\dots$    |
| $f'(x)$ | $-$        | $0$  | $+$        | $0$ | $-$        |
| $f(x)$  | $\searrow$ | 極小   | $\nearrow$ | 極大  | $\searrow$ |

ここで,

$$f(-1) = \frac{-1-1}{1+3} = -\frac{1}{2}, \quad f(3) = \frac{3-1}{9+3} = \frac{1}{6}.$$

ゆえに, 極大値は  $f(3) = \frac{1}{6}$ , 極小値は  $f(-1) = -\frac{1}{2}$ .



次の関数の極値を求めなさい.

$$(1) f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x$$

$$(2) f(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 3x + 6}$$

$$(3) f(x) = x^2 e^x$$

$$(4) f(x) = x^2 e^{-x^2}$$



(1) 極大値  $f(-1) = 13$ . 極小値  $f(-2) = 8$ ,  $f(1) = -19$ .

(2) 極大値  $f(3) = \frac{2}{3}$ . 極小値  $f(-1) = \frac{2}{5}$ .

(3) 極大値  $f(-2) = 4e^{-2}$ . 極小値  $f(0) = 0$ .

(4) 極大値  $f(-1) = e^{-1}$ ,  $f(1) = e^{-1}$ . 極小値  $f(0) = 0$ .

## 2階導関数を用いた判定法

増減表を書けば、なんとか極大極小を調べることができるが、増減表を書く作業が若干面倒である。

- $f'(x) = 0$  の解を小さい方から並べる  
…  $2 - \sqrt{3}$  と  $\sqrt{2} - 1$  どっちが小さい???
- $f'(x)$  の符号を調べる  
…  $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$  の符号を調べるのに、どの数を入れてみればいいのか??

そこで、もう少し楽に判定する方法を考えてみよう。

$f(x)$  は  $C^2$  級とする。  $f''(x)$  が連続とする!!

さて、極大というのは増加から減少に変わる場所であるが

$\Leftrightarrow f'(x)$  が  $+$  から  $-$  に変わる場所

$\Leftrightarrow f'(a) = 0$  で、 $f'(x)$  が減少している!!

$\Leftrightarrow f'(a) = 0$  で、 $f''(x) = \{f'(x)\}'$  が  $-$

$\Leftrightarrow f'(a) = 0$  で、 $[f''(x) \text{ が連続だから}] f''(a) < 0$  がいえればいいのか??

## 2 階導関数による極値判定法

$f(x)$  は  $C^2$  級の関数 ( $f''(x)$  が連続) とする.

(1)  $f'(a) = 0$ ,  $f''(a) > 0$  ならば  $f(x)$  は  $x = a$  で極小.

(2)  $f'(a) = 0$ ,  $f''(a) < 0$  ならば  $f(x)$  は  $x = a$  で極大.

### ちゃんとした証明

$f(x)$  に対してテイラーの定理を用いると,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c_x)}{2}(x - a)^2.$$

仮定から  $f'(a) = 0$ . また,  $f''(x)$  は連続だから,  $x$  が  $a$  に十分近いとき,  $f''(c_x)$  の符号と  $f''(a)$  の符号は同じといえる.

(1)  $f''(a) > 0$  のとき,  $f''(c_x) > 0$  であるから,  $x \neq a$  が  $a$  に十分近いとき,

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(c_x)}{2}(x - a)^2 > f(a).$$

これは  $x = a$  が (狭義の) 極小であることを意味する式である.

(2)  $f''(a) < 0$  のとき,  $f''(c_x) < 0$  であるから,  $x \neq a$  が  $a$  に十分近いとき,

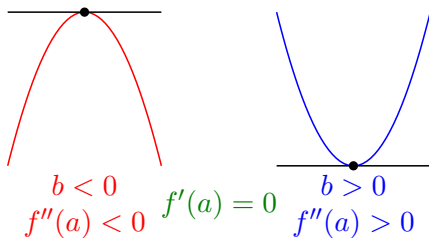
$$f(x) = f(a) + \frac{f''(c_x)}{2}(x-a)^2 < f(a).$$

これは  $x = a$  が (狭義の) 極大であることを意味する式である.

$f''(a) > 0$  のとき極大, と思いがちなのだが,  $f(x) = bx^2$  と同じように

- $b > 0$  のとき下に凸  $\Rightarrow$  極小
- $b < 0$  のとき上に凸  $\Rightarrow$  極大

$f''(0) = 2b$  であることと組み合わせて理解してほしい.



$$f(x) = 3x^5 - 35x^3 + 45x^2$$

$f(x)$  は多項式だからもちろん  $C^2$  級である.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 15x^4 - 105x^2 + 90x = 15x(x^3 - 7x + 6) \\ &= 15x(x-1)(x^2 + x - 6) = 15x(x-1)(x+3)(x-2) \end{aligned}$$

だから,  $f'(x) = 0$  の解は  $x = 0, 1, -3, 2$ .

$$\begin{aligned} f''(x) &= 60x^3 - 210x + 90 \text{ だから } f''(0) = 90 > 0, f''(1) = -60 < 0, \\ f''(-3) &= -900 < 0, f''(2) = 150 > 0. \end{aligned}$$

$$f(0) = 0, f(1) = 13, f(-3) = 621, f(2) = -4 \text{ である.}$$

極小値は  $f(0) = 0$  および  $f(2) = -4$ .

極大値は  $f(-3) = 621$  および  $f(1) = 13$ .

2 階導関数を用いた判定法は一般化できる.

$f(x)$  は  $C^n$  級であり,  $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ ,  $f^{(n)}(a) \neq 0$  とする.

- (1)  $n$  が偶数で,  $f^{(n)}(a) > 0$  であれば,  $x = a$  で極小.
- (2)  $n$  が偶数で,  $f^{(n)}(a) < 0$  であれば,  $x = a$  で極大.
- (3)  $n$  が奇数ならば,  $x = a$  で極値をとらない (極大・極小どちらでもない).

証明は 2 階導関数の場合と同じくテイラー展開を用いて証明される.

また,  $y = cx^n$  の  $x = 0$  での振る舞いを考える必要がある.

- $n$  が奇数のとき: 単調増加 ( $c > 0$ ), 単調減少 ( $c < 0$ ) であり,  $0$  の前後で符号が変わる.
- $n$  が偶数のとき:  $c > 0$  のとき,  $x = 0$  で最小なので符号は  $+$ ,  $c < 0$  のとき,  $x = 0$  で最大なので符号は  $-$ .

次の関数の極値を求めなさい.

$$(1) f(x) = x^2 e^{-x}$$

$$(2) f(x) = 3e^x - 6x + 5$$

$$(3) f(x) = (3x^2 - 20x + 45)\sqrt{x}$$

$$(4) f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$$

$$(5) f(x) = x^2 - 4x \sin x - 4 \cos x$$

$$(6) f(x) = \cos 2x + 2 \cos x$$

$n$  は整数とする.

(1) 極大値  $f(2) = 4e^{-2}$ . 極小値  $f(0) = 0$ .

(2) 極小値  $f(\log 2) = 11 - 6 \log 2$ .

(3) 極大値  $f(1) = 28$ . 極小値  $f(3) = 12\sqrt{3}$ .

(4) 極小値  $f(1) = 3$ .

(5) 極大値  $f(0) = -4$ ,  
$$f\left(-\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) = \left(-\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)^2 - 2\sqrt{3}\left(-\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) - 2.$$

極小値  $f\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) = \left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)^2 - 2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) - 2.$

(6) 極大値  $f(2n\pi) = 3$ ,  $f((2n+1)\pi) = -1$ .

極小値  $f\left(\pm\frac{2}{3}\pi + 2n\pi\right) = -\frac{3}{2}.$