1　1 階微分方程式の解法 (1)

1 番基本的な 1 階微分方程式　いわゆる不定積分を求める計算である.

問題 1.1.[!] (解の存在). $f(x)$ は (a,b) で連続かつ広義積分可能であるとする. このとき, $y'(x)=f(x)$, $y(a)=c$ を満たすような関数 $y(x)$ を 1 つ求めなさい.

問題 1.2.[!] (解の一意性). $y_1, y_2 \in C[a,b]$ は (a,b) で微分可能な関数とする. その 2 つの関数がともに $y'(x)=f(x)$, $y(a)=c$ を満たせば $y_1(x)=y_2(x)$ on $[a,b]$ であることを示しなさい.

問題 1.3. 次の微分方程式の初期値問題を解きなさい.

(1) $\begin{cases} y'(x)=x^2, \\ y(1)=-1. \end{cases}$　(2) $\begin{cases} y'(x)=e^x-\cos x, \\ y(0)=3. \end{cases}$　(3) $\begin{cases} y'(x)=\dfrac{1}{x^2} \quad x>0, \\ y(1)=2. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} y'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}, \\ y(1)=\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$　(5) $\begin{cases} y'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad x>0, \\ y(0)=-1. \end{cases}$　(6) $\begin{cases} y'(x)=\log x \quad x>0, \\ y(0)=0. \end{cases}$

1 階線形微分方程式

$\exp(x):=e^x$ とする. $p,q\in C[a,b]$ のとき,

$$\begin{cases} y'(x)+p(x)y(x)=q(x), \\ y(x_0)=y_0\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \quad y(x)=y_0\exp\Big(-\int_{x_0}^{x}p(s)\,ds\Big)+\int_{x_0}^{x}\exp\Big(-\int_{t}^{x}p(s)\,ds\Big)q(t)\,dt.$$

問題 1.4.[!] 以下を確認せよ.
(1) 指数法則に注意しながら $\Leftarrow$ を確認せよ.
(2) $z(x):=\exp\Big(\int_{x_0}^{x}p(s)\,ds\Big)y(x)$ が満たす 1 階微分方程式を構成し, $\Rightarrow$ を確認せよ.

問題 1.5. 次の初期値問題の解を求めなさい.

(1) $\begin{cases} y'(x)=2y(x)-4x, \\ y(0)=3. \end{cases}$　(2) $\begin{cases} y'(x)=-4y(x)+6e^x, \\ y(1)=e. \end{cases}$　(3) $\begin{cases} y'(x)=3y(x)+6e^{3x}\sin x, \\ y(0)=4. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} y'(x)=2xy(x), \\ y(2)=4. \end{cases}$　(5) $\begin{cases} y'(x)=6x^2y(x), \\ y(1)=3e. \end{cases}$　(6) $\begin{cases} y'(x)=-xy(x)+4x \\ y(0)=1. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} y'(x)=-\dfrac{6}{x}y(x), \\ y(1)=1. \end{cases}$　(8) $\begin{cases} y'(x)=\dfrac{2}{x}y(x)+6x^2, \\ y(1)=3. \end{cases}$　(9) $\begin{cases} y'(x)=-\dfrac{3y(x)}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}, \\ y(1)=0. \end{cases}$

(10) $\begin{cases} y'(x)=(\cos x)y(x)+2\sin x\cos x, \\ y(0)=2. \end{cases}$　(11) $\begin{cases} y'(x)=(\sin x)y(x)-4\sin x\cos x, \\ y(0)=e. \end{cases}$

変数分離形 $y' = A(x)B(y)$ となっているものを変数分離形の微分方程式という (従って, 自励系 $y' = f(y)$ を含む). 解の一意性は一般には保証されないが, とにかく 1 つでも求めるには次を考えればよい: $\boxed{\displaystyle\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dy}{B(y)} = \int_{x_0}^{x} A(x)\,dx}$. なお, $A(y(x_0)) = 0$ のときは $y(x) = y(x_0)$(定数解) も解となる.

問題 1.6. 次の初期値問題を満たす解を複数求めなさい (できるだけ多く).

$$(1)\ \begin{cases} y'(x) = y(x)^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} y'(x) = 4x\sqrt{y(x)}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

問題 1.7. 次の初期値問題の解を 1 つ求めなさい.

$$(1)\ \begin{cases} y'(x) = 1 + y(x)^2, \\ y(0) = 0. \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} y'(x) = 1 - y(x)^2, \\ y(1) = 0. \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} y'(x) = x^3 y(x)^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$(4)\ \begin{cases} y'(x) = xe^y, \\ y(1) = 1. \end{cases} \qquad (5)\ \begin{cases} y'(x) = x\sqrt{4 - y(x)^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases} \qquad (6)\ \begin{cases} y'(x) = x(y(x)^2 - 1), \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

$\boldsymbol{y' = f(ax + by + c)}$ の場合 これ以降の微分方程式は, 適当な変換を用いて 1 階線形微分方程式か変数分離形微分方程式にすることで解くことが可能になる. $y' = f(ax + by + c)$ の場合には $z(x) := ax + by(x) + c$ とおけば, z についての変数分離形微分方程式が導出できる.

問題 1.8. 次の初期値問題の解を 1 つ求めなさい.

$$(1)\ \begin{cases} y'(x) = (x - y(x) + 2)^2, \\ y(0) = 3. \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} y'(x) = \dfrac{2 - x - y(x)}{x + y(x)}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} y'(x) = (4x - y(x))^2, \\ y(0) = 1. \end{cases} \qquad (4)\ \begin{cases} y'(x) = (9x - 4y(x) + 7)^2, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

同次形 $y'(x) = f\left(\dfrac{y(x)}{x}\right)$ と書けるものを同次形微分方程式という. このときは $z(x) := \dfrac{y(x)}{x}$ と変換すれば z についての変数分離形微分方程式になる.

問題 1.9. 次の初期値問題の解を 1 つ求めなさい.

$$(1)\ \begin{cases} y'(x) = \dfrac{x^2 + y(x)^2}{2xy(x)}, \\ y(1) = 2. \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} y'(x) = \dfrac{2xy(x)}{x^2 - y(x)^2}, \\ y(2) = 1. \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x) - x}{y(x) + 2x}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$