

2 1 階微分方程式の解法 (2)

複雑な微分方程式でも, 上手く置き換えれば解ける微分方程式に直せることも多い.

Bernoulli(ベルヌーイ) $p, q \in C[a, b]$ とする. $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)y^n$ ($n \neq 0, 1$) という微分方程式を Bernoulli の微分方程式という. この場合は $z(x) := y(x)^{1-n}$ と置き換えれば, z についての 1 階線形微分方程式となる.

問題 2.1. 次の微分方程式に対する初期値問題の解を 1 つ求めなさい.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} y'(x) = \frac{y(x)}{x} + y(x)^2, \\ y(1) = 3. \end{cases} & (2) \quad & \begin{cases} y'(x) = -\frac{2y(x)}{x} + x\sqrt{y(x)}, \\ y(1) = 1. \end{cases} \\ (3) \quad & \begin{cases} y'(x) = 3y(x) + xy(x)^3, \\ y(0) = 2. \end{cases} & (4) \quad & \begin{cases} y'(x) = \frac{4y(x)}{x} + \frac{3x}{y(x)}, \\ y(2) = 8. \end{cases} \end{aligned}$$

Riccati(リッカチ) $y'(x) + p(x)y^2 + q(x)y(x) + r(x) = 0$ が Riccati の微分方程式である. もし, $y_1(x)$ がこの微分方程式を満たす (初期値は異なってよい) とき, $z(x) := \frac{1}{y(x) - y_1(x)}$ と置換すれば z についての 1 階線形微分方程式となる.

問題 2.2. 次の微分方程式に対する初期値問題の解を 1 つ求めなさい.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} y'(x) = (x-1)y(x)^2 - (2x-1)y(x) + x, \\ y(0) = 4. \quad [y_1(x) = a] \end{cases} & (2) \quad & \begin{cases} y'(x) = 4x^2 - 3 + 4xy(x) + y(x)^2, \\ y(0) = 2. \quad [y_1(x) = ax + b] \end{cases} \\ (3) \quad & \begin{cases} y'(x) = y(x)^2 - \frac{2}{x^2}, \\ y(1) = 2. \quad [y_1(x) = \frac{a}{x}] \end{cases} & (4) \quad & \begin{cases} y'(x) = x^2y(x)^2 + \frac{5y(x)}{x} + \frac{16}{x^2}, \\ y(1) = 5. \quad [y_1(x) = ax^b] \end{cases} \end{aligned}$$

全微分方程式 微分方程式の解 $y = y(x)$ は平面上の曲線と見れる. ところで, 平面上の曲線は媒介変数を用いて表せた: $x = x(t), y = y(t)$. そこで, $x(t), y(t)$ が満たす微分方程式

$$(\star_1) \quad A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t), y(t))y'(t) = 0$$

を考える. これを略記した $A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$ が全微分方程式である. $y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{A(x, y)}{B(x, y)}$ と変形できるので, 一般の正規形 1 階微分方程式 $y'(x) = f(x, y(x))$ は全微分方程式に変形できる.

さて, $F(x, y)$ を C^2 級として, $F(x(t), y(t)) = C$ の両辺を t で微分すると, 合成関数の微分法から $F_x(x(t), y(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t))y'(t) = 0$. もし, $F_x = A, F_y = B$ であれば, 微分方程式 $(\star_1)$ の解は $F(x(t), y(t)) = F(x(0), y(0))$ で表され, 全微分方程式の解は $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ となる. F は C^2 級だから $A_y = F_{xy} = F_{yx} = B_x$. $A_y = B_x$ を全微分方程式の完全性条件といい, これを満たす全微分方程式を完全微分方程式という. その解表示は

$$\int_{x_0}^x A(\xi, y) d\xi + \int_{y_0}^y B(x_0, \eta) d\eta = 0 \quad \text{or} \quad \int_{x_0}^x A(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y B(x, \eta) d\eta = 0.$$

なお, 変数分離系の微分方程式は完全微分方程式の 1 例である: $A(x)dx - \frac{dy}{B(y)} = 0$.

$A_y = B_x$ が成立しない場合, 全微分方程式に適当な関数 $M(x, y)$ を掛けたうえで $(MA)_y = (MB)_x$ となるようにする. この M を積分因子というが, 求めるのは容易ではない (偏微分方程式). ただ, $x(y)$ だけの関数になる場合には求めやすくなる. その条件は

$$\frac{A_y(x, y) - B_x(x, y)}{B(x, y)} \equiv C(x) = \frac{M'(x)}{M(x)}, \quad \frac{A_y(x, y) - B_x(x, y)}{A(x, y)} \equiv C(y) = -\frac{M'(y)}{M(y)}.$$

問題 2.3. 次の完全微分方程式の初期値問題の解を 1 つ求めなさい (陽関数表示は不要).

- (1) $(2x + 3y + 1)dx + (3x - 4y + 1)dy = 0, \quad (x_0, y_0) = (0, 0).$
- (2) $(3x^2 + 6xy + 2)dx + (3x^2 - 3y^2 - 4)dy = 0, \quad (x_0, y_0) = (1, 1).$
- (3) $(xy^2 + 2\sin x + 3)dx + (x^2y - 3y - 2)dy = 0, \quad (x_0, y_0) = (0, 2).$
- (4) $(x^4 + 3x^2y^2 - y^4)dx + (2x^3y - 4xy^3)dy = 0, \quad (x_0, y_0) = (2, 3).$
- (5) $(2\cos y + ye^x + 1)dx + (-2x\sin y + e^x - 2)dy = 0, \quad (x_0, y_0) = (0, 0).$

問題 2.4. 次の全微分方程式の初期値問題の解を適切な積分因子を決定した上で 1 つ求めなさい (陽関数表示しなくてもよい).

- (1) $(2x^2 - 6xy^2 + 2x - 3y^2 + 10y)dx + (5 - 6xy)dy = 0, \quad (x_0, y_0) = (1, 1).$
- (2) $3y(x - 2y^3)dx + x(x - 12y^3)dy = 0, \quad (x_0, y_0) = (2, 1).$
- (3) $y(3x^2 - 8xy + 3y^2)dx + 2x(2x^2 - 10xy + 9y^2)dy = 0, \quad (x_0, y_0) = (2, 1).$
- (4) $(2x^3 - y^3)dx + xy(x^3 - 2y^3 - 3y)dy = 0, \quad (x_0, y_0) = (-1, 1).$

その他. 非正規形の微分方程式として, Clairaut(クレロー) の微分方程式 $y(x) = xy'(x) + f(y'(x))$ や d'Alembert(ダランベール) の微分方程式 $y(x) = xf(y'(x)) + g(y'(x))$ が挙げられるが, ここでは扱わない. ちなみに Clairaut(クレロー) の微分方程式については, $y = cx + f(c)$ およびのそれらの包絡線が解になる.