3　定数係数微分方程式 (1)

ここでは, 以下のような n 階定数係数線形微分方程式 (の初期値問題) を考える:

$$(\heartsuit)\quad \begin{cases} y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \\ y(0) = b_0, y'(0) = b_1, \cdots, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}. \end{cases}$$

Laplace 変換による解法　$f \in C[0,\infty)$ は $|f(x)| \le Me^{\gamma x}$ となる関数とする. このとき,

$$\mathcal{L}[f](z) := \int_0^\infty f(x)e^{-zx}\,dx$$

が $\mathrm{Re}\,z > \gamma$ で存在する (さらに, 正則関数となる). これを $f(x)$ の **Laplace 変換**という. ちなみに, Laplace 変換は逆変換があり, それは複素積分を用いて

$$\mathcal{L}^{-1}[F](x) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-Ri}^{\gamma+Ri} F(z)e^{zx}\,dx \quad (\text{Bromwich 積分}).$$

通常は逆変換を利用するのではなく, 変換した結果を考察して元の形を考える.

公式. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ とし, Γ はガンマ関数 ($\Gamma(m+1) = m!$) である.

(1) $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](z) = \alpha\mathcal{L}[f](z) + \beta\mathcal{L}[g](z)$　　(2) $\mathcal{L}[f^{(n)}](z) = z^n\mathcal{L}[f](z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} f^{(k)}(0)$

(3) $\mathcal{L}[x^m e^{\alpha x}] = \dfrac{\Gamma(m+1)}{(z-a)^{m+1}}$　　(4) $\mathcal{L}[e^{\alpha x}] = \dfrac{1}{z-\alpha}$

(5) $\mathcal{L}[e^{ax}\cos bx] = \dfrac{z-a}{(z-a)^2+b^2}$　　(6) $\mathcal{L}[e^{ax}\sin bx] = \dfrac{b}{(z-a)^2+b^2}$

例 3.1. Laplace 変換を用いて 2 階線形微分方程式の初期値問題を解く.

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 2e^x\cos x, \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Laplace 変換を実行: $(z^2-2z+2)F(z) - (zy(0) + y'(0)) + 2y(0) = \dfrac{2(z-1)}{z^2-2z+2}$. 初期条件より

$$(z^2-2z+2)F(z) - 2z + 3 = \frac{2(z-1)}{z^2-2z+2}. \qquad \therefore F(z) = \frac{2z-3}{z^2-2z+2} + \frac{2(z-1)}{(z^2-2z+2)^2}.$$

部分分数展開を実行する: $F(z) = \dfrac{1-\frac{1}{2}i}{z-(1-i)} + \dfrac{1+\frac{1}{2}i}{z-(1+i)} + \dfrac{-\frac{1}{2}i}{(z-(1+i))^2} + \dfrac{\frac{1}{2}i}{(z-(1-i))^2}$.

$$\begin{aligned} \therefore\ y(x) &= \Big(1-\frac{1}{2}i\Big)e^{(1-i)x} + \Big(1+\frac{1}{2}i\Big)\Big)e^{(1+i)x} - \frac{1}{2}ixe^{(1+i)x} + \frac{1}{2}ixe^{(1-i)x} \\ &= 2e^x\cos x - e^x\sin x + xe^x\sin x. \end{aligned}$$

問題 3.1. 次の微分方程式に対する初期値問題を Laplace 変換を利用して解きなさい.

(1) $\begin{cases} y'(x) + y(x) = 2e^x, \\ y(0) = -3. \end{cases}$　(2) $\begin{cases} y'(x) - 6y(x) = 12e^{6x}, \\ y(0) = 4. \end{cases}$　(3) $\begin{cases} y'(x) - 2y(x) = 4e^{2x}, \\ y(0) = -2. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} y'(x) - 2y(x) = 10\cos x, \\ y(0) = -3. \end{cases}$　(5) $\begin{cases} y'(x) - y(x) = 6e^x\sin x, \\ y(0) = 3. \end{cases}$　(6) $\begin{cases} y'(x) + 3y(x) = 6\sin 3x, \\ y(0) = 2. \end{cases}$

問題 3.2. 次の微分方程式に対する初期値問題を Laplace 変換を利用して解きなさい.

(1) $\begin{cases} y''(x) - y(x) = 2x - 1, \\ y(0) = 2, y'(0) = -3. \end{cases}$
(2) $\begin{cases} y''(x) - y(x) = 4x^2 - 6x, \\ y(0) = 1, y'(0) = -5. \end{cases}$
(3) $\begin{cases} y''(x) + y(x) = 4e^x, \\ y(0) = 3, y'(0) = -1. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} y''(x) - y(x) = 5\cos 2x, \\ y(0) = 3, y'(0) = 4. \end{cases}$
(5) $\begin{cases} y''(x) + y(x) = 6x, \\ y(0) = -3, y'(0) = 1. \end{cases}$
(6) $\begin{cases} y''(x) - 4y(x) = 4e^{2x}, \\ y(0) = -2, y'(0) = 5. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} y''(x) - 9y(x) = 8e^x, \\ y(0) = -4, y'(0) = 2. \end{cases}$
(8) $\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) = 4e^x, \\ y(0) = 3, y'(0) = -2. \end{cases}$
(9) $\begin{cases} y''(x) + 3y'(x) = -6e^{-3x}, \\ y(0) = 2, y'(0) = 5. \end{cases}$

(10) $\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 10\cos x, \\ y(0) = 1, y'(0) = -1. \end{cases}$
(11) $\begin{cases} y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 6x - 1, \\ y(0) = 2, y'(0) = -3. \end{cases}$

(12) $\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x, \\ y(0) = -3, y'(0) = 2. \end{cases}$
(13) $\begin{cases} y''(x) - 5y'(x) - 6y(x) = 3e^{2x}, \\ y(0) = 2, y'(0) = -3. \end{cases}$

(14) $\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 5e^{-2x}, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$
(15) $\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 3e^{2x}, \\ y(0) = 0, y'(0) = -2. \end{cases}$

(16) $\begin{cases} y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 6e^{2x}, \\ y(0) = 3, y'(0) = 5. \end{cases}$
(17) $\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 4e^{-2x}, \\ y(0) = 2, y'(0) = 1. \end{cases}$

(18) $\begin{cases} y'''(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) = 6e^x, \\ y(0) = 2, y'(0) = -3, y''(0) = 2. \end{cases}$
(19) $\begin{cases} y'''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^x, \\ y(0) = 0, y'(0) = -1, y''(0) = 2. \end{cases}$

演算子法. 微分を D と表せば, 前述の例題は $(D^2 - 2D + 2)[y(x)] = 2e^x \cos x$ である. ここで, $D[e^{\alpha x}] = \alpha e^{\alpha x}$ なので $\dfrac{1}{D}[e^{\alpha x}] = \dfrac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$ とみてよいだろう. $L(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$ とすると, ($\heartsuit$) は $L(D)[y] = f$ となる. このとき, $\dfrac{1}{L(D)}[e^{\alpha x}] = \dfrac{1}{L(\alpha)} e^{\alpha x}$. また, Leibniz の公式より,

$$L(D)[e^{\alpha x} f(x)] = e^{\alpha} \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r \alpha^{k-r} D^r [f(x)] = e^{\alpha} \sum_{k=0}^{n} a_k (D+\alpha)^k [f] = e^{\alpha x} L(D+\alpha)[f].$$

従って, $\dfrac{1}{L(D)}[e^{\alpha x} f] = e^{\alpha x} \dfrac{1}{L(D+\alpha)}[f]$. $D[x] = 1$ なので, $\dfrac{1}{D}[1] = x$. これらの記号法を利用すると,

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{D-1-i} \frac{1}{D-1+i}[e^{(1+i)x}] + \frac{1}{D-1+i} \frac{1}{D-1-i}[e^{(1+i)x}] \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{D-1-i}[e^{(1+i)x}] - \frac{1}{2i} \frac{1}{D-1+i}[e^{(1-i)x}] \\ &= \frac{1}{2i} e^{(1+i)x} \frac{1}{D}[1] - \frac{1}{2i} e^{(1+i)x} \frac{1}{D}[1] = \frac{1}{2i} e^{(1+i)x} x - \frac{1}{2i} e^{(1+i)x} x = xe^x \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = xe^x \sin x. \end{aligned}$$

一方, $(D^2 - 2D + 2)[y] = 0$ なる解は $e^x \cos x$ と $e^x \sin x$ の 1 次結合であったので, 求める解は $xe^x \sin x + C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$. $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ だったから, $2 = C_1$, $1 = C_1 + C_2$ より $C_1 = 2$, $C_2 = -1$. ゆえに $y(x) = xe^x \sin x + 2e^x \cos x - e^x \sin x$. Laplace 変換よりも簡単に解けたが. この解法を Heaviside の演算子法という. その数学的な厳密な定式化は Bromwich が行った (Laplace 変換が必要).

注意. 上記の方法はいずれにしても具体的に求めることで解があったことは分かっても, 一意性は分からないし, 非斉次項が一般の関数の場合には明示的に解けることは保証していない.