

4 定数係数微分方程式 (2)

行列の指数関数による解の一意存在の定式化

A を N 次正方行列とすると,

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

を行列の指数関数という. $\exp(xA)$ を用いると, N 次元列ベクトルに値をとる定数係数 1 階線形微分方程式の解表示が可能になる:

$$\begin{cases} y'(x) = Ay(x) + F(x), \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^N \end{cases} \Leftrightarrow y(x) = \exp(xA)y_0 + \int_0^x \exp((x-s)A)F(s)ds.$$

ベクトル値関数に対する 1 階線形微分方程式の初期値問題の解の存在や一意性は絶対値に代わる適切なノルムを考えることで得られる. また, 上記の解の表現公式は逐次近似法や定数変化法により得られる. ベクトル値の微分方程式は連立線形微分方程式を考える際に登場する. また (♡) に対し $y(x) := {}^t(y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ を考えれば

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} y(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}, \quad y(0) \in \mathbb{R}^N$$

と書け, 上記の問題に帰着される.

問題 4.1. $\mathbb{R}^N$ は 2 ノルム $\|x\| := \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2\right)^{1/2}$ を用いる. $M \times N$ 行列に $\|A\| := \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$

というノルムを導入する. このとき, 次を示せ.

(1) A, B がともに $M \times N$ 行列のとき tAB は定義可能でこれは N 次正方行列である. そこで $\langle A, B \rangle := \text{tr}({}^tA\overline{B})$ (tr は対角成分の和: $\text{tr}A := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{NN}$) とすれば $\langle A, B \rangle$ は $M \times N$ 行列に対する内積になる. 更に, この内積で定まるノルムが導入したノルムに一致する.

(2) $x \in \mathbb{R}^N$ のとき $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$.

(3) A が $L \times M$ 行列, B が $M \times N$ 行列のとき $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

問題 4.2. $A_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$, すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$ である必要十分条件は各成分が収束すること, すなわち $A = (a_{ij})$, $A_n = (a_{ij}^{(n)})$ に対して $a_{ij}^{(n)} \rightarrow a_{ij} (n \rightarrow \infty)$, を示せ.

以上の問より行列やベクトルに値をとる関数の微分積分は各成分に対して行えばよいことがわかる.

問題 4.3. A は N 次正方行列とする. 次を示せ.

(1) $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ が絶対収束すること.

(2) $A \exp(xA) = (\exp(xA))' = \exp(xA)A$.

(3) $\|A\|_{\infty}$ が十分小さければ $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ は絶対収束し, それは $(I - A)^{-1}$ であること.

問題 4.4. $AB = BA$ のとき, $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B) = \exp(B)\exp(A)$ を示せ. また, $AB \neq BA$ のとき, $\exp(A)\exp(B)$, $\exp(A+B)$, $\exp(B)\exp(A)$ がすべて異なる例を構成せよ.

問題 4.5. $T(x)$ を以下の 3 条件を満たす N 次正方行列とする. このとき, $T(x) = \exp(xB)$ であることを示せ.

$$(1) T(x)T(y) = T(x+y)$$

$$(2) T(0) = I(\text{単位行列})$$

$$(3) B = T'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} \text{ が存在する } (x=0 \text{ で微分可能}).$$

代表的な行列の指数関数.

$$(1) A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}, \exp(xA) = \begin{pmatrix} e^{ax} & 0 \\ 0 & e^{bx} \end{pmatrix}.$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} a^n & nba^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}, \exp(xA) = \begin{pmatrix} e^{ax} & bxe^{ax} \\ 0 & e^{ax} \end{pmatrix}.$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \Rightarrow \exp(xA) = e^{ax} \begin{pmatrix} \cos bx & -\sin bx \\ \sin bx & \cos bx \end{pmatrix}.$$

問題 4.6. (定数係数 2 階線形微分方程式). $y''(x) - k^2 y(x) = f(x)$ および $y''(x) + k^2 y(x) = f(x)$ を考えるのに必要な行列はそれぞれ $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k^2 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 & 0 \end{pmatrix}$ である. 以下の間に答えなさい.

$$(1) \exp(xA), \exp(xB) \text{ を求めよ.}$$

(2) $F(x) := {}^t(0, f(x))$ とおくことで, ベクトル値の定数係数 1 階線形微分方程式の解表示から次の初期値問題の解の表現公式を導きなさい.

$$\begin{cases} y''(x) - k^2 y(x) = f(x), \\ y(0) = 0 = y'(0), \end{cases} \quad \begin{cases} y''(x) + k^2 y(x) = f(x), \\ y(0) = 0 = y'(0). \end{cases}$$

問題 4.7. 次の行列 A に対し, $\exp(xA)$ を求めなさい.

$$\begin{array}{lllll} (1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & (4) \begin{pmatrix} 2 & -15 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & (5) \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (6) \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} & (7) \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & (8) \begin{pmatrix} -4 & -3 & 6 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} & (9) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} & \end{array}$$