5　ベクトル値微分方程式の解の一意存在

1 階線形微分方程式の初期値問題は解の表現公式があったように解の一意存在は分かる．一般の 2 階線形微分方程式の初期値問題 ($p, q, f \in C[a, b]$ とする)

$$\textbf{(2DE)} \qquad \begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \\ y(a) = b_0,\ y'(a) = b_1 \end{cases}$$

の解 $y \in C^2[a, b]$ の一意存在は自明ではない．$\boldsymbol{y}(x) := {}^t(y(x), y'(x))$ とおけば

$$\boldsymbol{y}'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(x) \\ -p(x)y'(x) - q(x)y(x) + f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

となるのでベクトル値の 1 階線形微分方程式になる．また, 連立 1 階線形微分方程式

$$\begin{cases} x'(t) = p_{11}(t)x(t) + p_{12}(t)y(t) + f(t) \\ y'(t) = p_{21}(t)x(t) + p_{22}(t)y(t) + g(t) \\ x(a) = b_1,\ y(a) = b_2 \end{cases}$$

もベクトル値 1 階線形微分方程式とみなせる．以下では $A(x)$ は N 次正方行列 ($\mathbb{R}^{N\times N}$) に値をとる $[a, b]$ で連続な関数, $F(x)$ は N 次元列ベクトル ($\mathbb{R}^N$) に値をとる $[a, b]$ で連続な関数とする．

$$\textbf{(VDE)} \qquad \begin{cases} y'(x) = A(x)y(x) + F(x), \\ y(a) = c \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

に対し行列の指数関数を用いて表現するのは一般に困難である (行列の非可換性)．そこで存在と一意性を別の方法で示す必要がある (以降の問は $N = 2$ に限定しても十分である)．

問題 5.1. $A(x) \in C([a, b]; \mathbb{R}^{N\times N})$ が可換, すなわち $A(x)A(y) = A(y)A(x)\ \forall\ x, y \in [a, b]$, であれば (**VDE**) with $F = 0$ に対応した**積分方程式** $y(x) = y_0 + \displaystyle\int_a^x A(s)y(s)\,ds$ の解として, 次の関数列 $\{y_n(x)\}$ の一様極限で与えられることを示せ:

$$y_0(x) := y_0, \quad y_n(x) := y_0 + \int_a^x A(s)y_{n-1}(s)\,ds.$$

ヒント: $y_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\Big(\int_a^x A(s)\,ds\Big)^k y_0$, $\|y_n(x) - y_{n-1}(x)\| \le \dfrac{\|y_0\|}{n!}\Big(\displaystyle\int_a^x \|A(s)\|\,ds\Big)^n$．従ってこの場合には $y(x) = \exp\Big(\displaystyle\int_a^x A(s)\,ds\Big)y_0$ と行列の指数関数を用いて表せる．

初期値問題 (**VDE**) を積分して得られる積分方程式

$$\textbf{(INT)} \qquad y(x) = c + \int_a^x [A(s)y(s) + F(s)]\,ds$$

に対し解 $y \in C[a, b]$ の存在を縮小写像の原理により示そう (これにより (**VDE**) の解の存在が示せる)．

問題 5.2. (**INT**) を満たす $y \in C([a, b]; \mathbb{R}^N)$ が存在すれば $y \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$ であり (**VDE**) を満たすことを示せ．

問題 5.3. $C([a,b];\mathbb{R}^N)$ に対し, $\|f\|_\lambda := \sup_{a\le x\le b} e^{-\lambda x}\|f(x)\|$ とすれば Banach 空間になる (任意の Cauchy 列が収束する). ここでいう収束は一様収束を指す.

(1) $\lambda > 0$ が十分大きいとき,

$$(\Phi u)(x) := y_0 + \int_a^x [A(s)u(s) + F(s)]\,ds$$

が縮小写像 $[\|\Phi u - \Phi v\|_\lambda \le c\,\|u - v\|_\lambda (0 < c < 1)]$ となることを示せ.

(2) $u_0(x) := y_0$, $u_n(x) := (\Phi u_{n-1})(x)$ によって定められる $\{u_n\} \subset C[a,b]$ は Cauchy 列であることを示し, 極限関数 $u(x) \in C[a,b]$ が存在することを示せ.

問題 5.4. (解の一意性). $y_1(x), y_2(x) \in C^1([a,b];\mathbb{R}^N)$ が (**VDE**) の解であるとする.

(1) $z(x) := \|y_1(x) - y_2(x)\|^2$ に対して $z'(x) \le C\,z(x)$ となる $C > 0$ があることを示せ.

(2) $[e^{-Cx}z(x)]' \le 0$ から $z(a) = 0$ に注意して $y_1(x) = y_2(x)$ on $[a,b]$ を示せ.

(3) $y_n(x) \in C^1([a,b];\mathbb{R}^N)$ が $y_n(a) = y_{0n} \in \mathbb{R}^N$ なる (**VDE**) の解とする. $y_{0n} \to y_0 (n \to \infty)$ であれば $y_n(x)$ はある関数 $y(x)$ に一様収束し, (**VDE**) with $y(a) = y_0$ の解となることを示せ (初期値に対する連続依存性). これが言えて初めて初期値問題 (**VDE**) が**適切**といえる.

(4)! $y_n(x) \in C^1([a,b];\mathbb{R}^N)$ が (**VDE**) with $F = F_n \in C([a,b];\mathbb{R}^N)$ の解とする. $F_n \to F_0 (n \to \infty$, 一様収束) であれば $y_n(x)$ はある関数 $y(x)$ に一様収束し, (**VDE**) with $F = F_0$ の解となることを示せ. **ヒント**: $z'(x) \le B + Cz(x)$ は $e^{-Cx}z(x)$ を考えるとよい.

縮小写像の原理 (Banach の不動点定理) は数多くの応用がある:

問題 5.5. $f \in C[a,b]$, $k \in C([a,b] \times [a,b])$ は実数値関数とする. 次の積分方程式を考える.

$$u(x) = \int_a^x k(x,y)u(y)\,dy + f(x).$$

(1) 解 $u = u[f] \in C[a,b]$ の存在を示せ. **ヒント**. $(\Phi u)(x) := \int_a^x k(x,y)u(y)\,dy + f(x)$ が縮小写像.

(2) 解がただ 1 つであることを示せ.

(3) $f_n \to f (n \to \infty)$ ならば $u[f_n] \to u[f] (n \to \infty)$ を示せ.

(**VDE**) で $F = 0$ とする. $y(a) = e_i$(基本ベクトル) の解を $e_i(x)$ とおけば $y(x) = c_1e_1(x) + c_2e_2(x) + \cdots + c_Ne_N(x)$ が (**VDE**) の解である. $\{e_1(x), e_2(x), \cdots, e_N(x)\}$ を $x = a$ で**正規化された基本解系**という. また, $E(x,a) := (e_1(x), e_2(x), \cdots, e_N(x))$ とすれば $E(x,a)c$ が (**VDE**) の解になるので, この $E(x,a)$ を**基本解行列**という. $E(x,a)$ は次の行列の指数関数 $\exp((x-a)A)$ のような性質がある. ただし $x, y, z \in [a,b]$ とする.

$$E(x,x) = I,\ E(z,y)E(y,x) = E(z,x),\ [E(x,y)]_x = A(x)E(x,y),\ [E(x,y)]_y = -E(x,y)A(y).$$

(**VDE**) の (初期値 $y(a)$ は異なるものでよい) N 個の解 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_N(x) \in C^1([a,b];\mathbb{R}^N)$ に対して正方行列 $Y(x) := (y_1(x), y_2(x), \cdots, y_N(x))$ を考える. このとき, $Y'(x) = A(x)Y(x)$ となっている. 一方, $W(x) := \det Y(x)$ を **Wronskian** という. $\det Y'(x)$ と $(\det Y(x))'$ とは異なる.

問題 5.6. (**VDE**) の Wronskian に対し $W'(x) = (\mathrm{tr}A(x))\,W(x)$ を示せ. **ヒント**: 行列式の性質.

従って N 組の初期条件が 1 次独立 $\Rightarrow W(a) \ne 0 \Rightarrow W(x) \ne 0\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow N$ 組の解は 1 次独立. このときの N 組の解 $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_N(x)\}$ を単に**基本解系**という.

問題 5.7. 基本解系 $\{y_1(x), y_2(x), \cdots, y_N(x)\}$ から $x = a$ で正規化された基本解系を作れ.

2 階線形微分方程式 (**2DE**) は (**VDE**) に帰着された. 従って解の一意存在がいえ (正規化された) 基本解系も得られる. 第 1 成分が分かれば第 2 成分はそれを微分したものゆえ第 1 成分のみ取り出したもの $\{e_{11}(x), e_{12}(x)\}$ を $x = a$ で**正規化された基本解系**という. 一般の基本解系も同様である.