6 微分不等式と Gronwall の不等式・解のアプリオリ評価や一意性

問題 6.1. (Gronwall の不等式・微分形). $g \in C[a,b]$ とする. $y'(x) \le g(x)y(x)$ on $[a,b]$ ならば $y(x) \le y(a)\exp\Big(\int_a^x g(s)\,ds\Big)$ on $[a,b]$ を示せ. また, $f \in C[a,b]$ を追加したものは成立するか: $y'(x) \le f(x) + g(x)y(x)$ on $[a,b]$ を満たせば

$$y(x) \le y(a)\exp\Big(\int_a^x g(s)\,ds\Big) + \int_a^x \exp\Big(\int_t^x g(s)\,ds\Big) f(t)\,dt \text{ on } [a,b]\,?$$

問題 6.2. (Gronwall の不等式・積分形). $f, g \in C[a,b]$ で $g(x) \ge 0$ on $[a,b]$ とする. 次を示せ.

$$\begin{aligned} &y(x) \le f(x) + \int_a^x g(s)y(s)\,ds \quad \forall x \in [a,b] \\ &\qquad \Rightarrow\ y(x) \le f(x) + \int_a^x f(s)g(s)\exp\Big(\int_a^s g(r)\,dr\Big)\,ds \quad \forall x \in [a,b]. \end{aligned}$$

問題 6.3. $c \ge 0$, $g \in C[a,b]$ で $g(x) \ge 0$ on $[a,b]$ とする. $y \in C[a,b]$ with $y(x) \ge 0$ on $[a,b]$ が

$$y(x)^2 \le c^2 + 2\int_a^x g(s)y(s)\,ds \quad \forall x \in [a,b] \ \Rightarrow\ y(x) \le c + \int_a^x g(s)\,ds \quad \forall x \in [a,b]$$

を以下の手順に従って示せ.

(1) $u(x) := c^2 + 2\int_a^x g(s)y(s)\,ds$ に対し $u'(x) \le 2g(x)\sqrt{u(x)}$ on $[a,b]$.

(2) $u_\varepsilon(x) := \sqrt{u(x)+\varepsilon} \in C^1[a,b]$ であり, $u_\varepsilon'(x) \le g(x)$ on $[a,b]$.

(3) $y(x) \le \sqrt{c^2+\varepsilon} + \int_a^x g(s)\,ds$ on $[a,b]$.

★ ところで, なぜ u_ε を考える必要があったのだろうか.

問題 6.4. $\alpha \in (0,1)$ は定数とし, $f, g \in C[a,b]$ で $g(x) \ge 0$ on $[a,b]$ とする. $y \in C^1[a,b]$ with $y(x) \ge 0$ on $[a,b]$ が $(1-\alpha)y'(x) \le f(x)y(x) + g(x)y(x)^\alpha$ ならば次を示せ:

$$y(x)^{1-\alpha} \le y(a)^{1-\alpha}\exp\Big(\int_a^x f(s)\,ds\Big) + \int_a^x g(t)\exp\Big(\int_t^x f(s)\,ds\Big)\,dt \quad \forall x \in [a,b].$$

もし $\alpha > 1$ の場合はどこを修正すれば類似な不等式が得られるか考えてみよ.

問題 6.5.! $f, g \in C[0,\infty)$ は非負とする. 非負関数 $u \in C^1[0,\infty)$ が

$$u'(t) \le f(t)u(t) + g(t), \quad \int_t^{t+1} f(s)\,ds \le c_1,\ \int_t^{t+1} g(s)\,ds \le c_2,\ \int_t^{t+1} u(s)\,ds \le c_3 \quad \forall\, t \ge 0$$

を満たせば, $u(t+1) \le (c_2+c_3)e^{c_1}$ for $t \ge 0$ を示せ.

問題 6.6.! $p > 1$, $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$ とする. 非負関数 $u \in C^1[0,\infty)$ が $u'(t) + \alpha u(t)^p \le \beta$ for $t \ge 0$ を満たすとする. 次の各事項を示せ.

(1) $u(0) \le C := \Big(\dfrac{\beta}{\alpha}\Big)^{1/p}$ ならば $u(t) \le C$ for $t \ge 0$.

(2) $u(0) > C$ ならば $u(t) \ge C$ on $[0,T]$, $u(t) \le C$ on $[T,\infty)$ なる $T > 0$ が存在することを示せ.

(3) (2) の設定の下で $v(t) := u(t) - C$ は $v'(t) + \alpha v(t)^p \le 0$ on $[0,T]$ を示せ.

(4) v についての微分不等式を解くことにより $u(t) \le C + [\alpha(p-1)t]^{-1/(p-1)}$ for $t \ge 0$ を示せ.

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ とする. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ に対し

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L(x)|y_1 - y_2| \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in \Omega$$

となる $L(x)$ の存在が言えるとき, y について **Lipschitz 連続**, または各 x で Lipschtz 条件を満たすという. $L(x)$ がが有界になるときは**同程度 Lipschitz 連続**という.

問題 6.7. 次の関数が y について Lipschitz 条件を満たさないことを示しなさい.

(1) $f(x,y)=\sqrt{y},\ \Omega:=\mathbb{R}\times[0,\infty)$. (2) $f(x,y)=\dfrac{y\log y}{1+x^2},\ \Omega:=\mathbb{R}\times(0,\infty)$.

問題 6.8. 次の関数が y について同程度 Lipschitz 連続であることを示しなさい.

(1) $f(x,y)=\dfrac{\sin y}{1+x},\ \Omega:=[0,\infty)\times\mathbb{R}$. (2) $f(x,y)=e^{-xy},\ \Omega:=(0,1)\times(0,\infty)$.

問題 6.9. 次の 1 階非線形微分方程式の初期値問題に対し, 非線形項 $[f(x,y)]$ が y について Lipschitz 条件を満たすことを示し, 解の一意性を示せ.

(1) $\begin{cases} y'(x)=\sin(y(x)) \text{ in } [0,a], \\ y(0)=c.\ [f(x,y):=\sin y] \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y'(x)=xe^{-y(x)^2} \text{ in } [0,a], \\ y(0)=c.\ [f(x,y):=xe^{-y^2}] \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y'(x)=\sqrt{\dfrac{1+y(x)^2}{x}} \text{ in } (0,a), \\ y(0)=c.\ \left[f(x,y):=\sqrt{\dfrac{1+y^2}{x}}\right] \end{cases}$ (4) $\begin{cases} y'(x)=\dfrac{3x-y(x)}{\sqrt{4+y(x)^2}} \text{ in } [0,a], \\ y(0)=c.\ \left[f(x,y):=\dfrac{3x-y}{\sqrt{4+y^2}}\right] \end{cases}$

問題 6.10. 微分方程式の初期値問題 $y'(x)=-\sqrt[3]{y(x)},\ y(0)=c>0$ を考える.

(1) $f(y):=-\sqrt[3]{y}$ は $[c/2,2c]$ 上で Lipschitz 条件を満たすことを示しなさい.

(2) 十分小さな $b>0$ に対し $y\in C^1[0,b]$ なる解は存在すればただ 1 つだけであることを示しなさい.

これを繰り返せば, $y(x)>0$ である限り解は一意であることがわかる. ところで $-\sqrt[3]{y}$ は $[0,a]$ において y について Lipschitz 条件を満たさない. $y(x)=0$ になったあと解の一意性が破綻する (したがって, 適切ではなくなる) が, このような現象を**解の消滅**ということがある.

問題 6.11. Riccati の微分方程式に対する初期値問題を考える. $p,q,r\in C[a,b]$ に対し

$$\begin{cases} y'(x)=p(x)y(x)^2+q(x)y(x)+r(x), \\ y(a)=c. \end{cases}$$

(1) $M>|c|$ とする. $F(x,y):=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$ が $[a,b]\times[-2M,2M]$ において y について同程度 Lipschtz 連続であることを示せ.

(2) 解 $y(x)$ が存在すれば $[a,a+\varepsilon]$ では $|y(x)|\le 2M$ なる $\varepsilon>0$ が存在することを示せ.

(3) $[a,a+\varepsilon]$ では解が一意であることを示せ.

$y'(x)=1+y(x)^2$ について $1\in C(\mathbb{R})$ だが $y(x):=\tan x$ は $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$ で発散する. このような区間の途中で解が発散することを**解の爆発**という.

ちなみに Bernoulli の微分方程式は解の表現が可能であるので, 解の存在や一意性は明確であろう. Riccati の微分方程式の解の存在はどうなるだろうか検討せよ.

問題 6.12. 前問で $p(x)\le 0$ on $[a,b]$ ならば解の爆発が起こらないこと, すなわち $|y(x)|\le C$ on $[a,b]$ なる $C>0$ が存在することを示せ. 一応解の存在は仮定してよい.

一般に変数が 2 個以上になった微分方程式 (偏微分方程式) の場合, 偏微分ができても連続とは言えないため, 解の大きさに対する**アプリオリ評価**が必要になってくる. 実際に微分方程式が解けなくても, アプリオリ評価なら導出できる場合, それを利用して解の一意性や存在も示すことができる. 現代の微分方程式の研究では, いかに都合の良いアプリオリ評価を用意できるかが重要になってくるのである. そういった意味で解析学は不等式の学問といわれるのである.