7　基本解系と階数低下法

問題 7.1.! 以下の各事項を示せ.

(1) $v \in C^1[-a,a]$ とする. v が偶関数 $(v(-x) = v(x))$ ならば $v'(x)$ は奇関数 $(v'(-x) = -v'(x))$ となることを示せ.

(2) $p \in C[-a,a]$ は奇関数, $q \in C[-a,a]$ は偶関数とする. 微分方程式 $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x) = 0$ の解の存在は分かっている. $x = 0$ で正規化された基本解系 $\{u_1(x), u_2(x)\}$ に対し u_1 は偶関数, u_2 は奇関数であることを示せ.

問題 7.2. $p, q, f \in C[a,b]$ とする. また, 微分方程式 $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ の恒等的に 0 でない解を $v \in C^2[a,b]$ とする. 以下, 次の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = f(x), \\ y(a) = \alpha,\ y'(a) = \beta. \end{cases}$$

(1) $y(x) = z(x)v(x)$ がこの初期値問題の解であるとして, z についての微分方程式を導け.

(2) z に対する初期条件件を求めよ ($z(a)$, $z'(a)$ を求めよ).

(3) $w(x) := z'(x)$ についての 1 階線形微分方程式になるので, w を具体表示せよ.

(4) $z(x)$ を具体表示することで, 初期値問題の解 $y(x)$ を導け.

(5) $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ の $x = a$ で正規化された基本解系を求めよ.

問題 7.3.! 次の 2 つの関数が基本解系となるような 2 階線形微分方程式を構成しなさい.

(1) $\sqrt{x^2+4},\ x$　　(2) $e^x,\ xe^{-x}$　　(3) $x^3 - x,\ x^2 + 1$

問題 7.4. 微分方程式 $xy''(x) + (4x-1)y'(x) + (4x-2)y(x) = 0$ について以下の問に答えよ.

(1) $u_1(x) := e^{ax}$ が解であるという. a を求めなさい.

(2) $u_2(x) := z(x)e^{ax}$ が解であるとき, z についての微分方程式を解くことで $u_2(x)$ を求めなさい.

(3) $x = 1$ で正規化された基本解系を求めなさい.

問題 7.5. 微分方程式 $y''(x) + 2(\tan x)y'(x) + (1 + 2\tan^2 x)y(x) = 0$ について以下の問に答えよ.

(1) $u_1(x) := \cos x$ が解であることを示せ.

(2) $u_2(x) := z(x)\cos x$ が解であるとき, z についての微分方程式を解くことで $u_2(x)$ を求めなさい.

(3) 次の非斉次項つき初期値問題を解きなさい.

$$\begin{cases} y''(x) + 2(\tan x)y'(x) + (1 + 2\tan^2 x)y(x) = 12x^2\cos x, \\ y(0) = -1, y'(0) = 2. \end{cases}$$

問題 7.6. 微分方程式 $xy''(x) + 2(1 - x\cot x)y'(x) + (x - 2\cot x + 2x\cot^2 x)y(x) = 0$ について以下の問に答えよ.

(1) $u_1(x) := \sin x$ が解であることを示せ.

(2) 基本解系を 1 組求めなさい.

(3) 次の非斉次項つき初期値問題を解きなさい.

$$\begin{cases} xy''(x) + 2(1 - x\cot x)y'(x) + (x - 2\cot x + 2x\cot^2 x)y(x) = (6x^2 - 4x + 9)\sin x, \\ y(0) = 3, y'(0) = -2. \end{cases}$$

問題 7.7. 微分方程式 $4x^2y''(x)+(24x^2+4x)y'(x)+(36x^2+12x-1)y(x)=0$ について以下の問に答えよ.

(1) $u_1(x):=e^{-3x}\sqrt{x}$ が解であることを示せ.

(2) 基本解系を 1 組求めなさい.

問題 7.8.! $p,q,r\in C[a,b]$ に対して Riccati の微分方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} y'(x)+p(x)y^2+q(x)y(x)+r(x)=0, \\ y(a)=\alpha. \end{cases}$$

(1) $p\in C^1[a,b]$ は $p(x)\neq 0$ on $[a,b]$ なる関数とする. $u'(x)=p(x)y(x)u(x)$, $u(x)\neq 0$ on $[a,b]$ となる $u\in C^2[a,b]$ が存在すれば, u が満たす方程式は $u''(x)+\left(q(x)-\dfrac{p'(x)}{p(x)}\right)u'(x)+p(x)r(x)u(x)=0$ となることを示せ.

(2) $\{u_1,u_2\}$ を $x=a$ で正規化された (1) に挙げた 2 階線形微分方程式の基本解系とする. Riccati の微分方程式の初期値問題の解が $y(x)=\dfrac{[u_1'(x)+\alpha p(a)u_2'(x)]}{p(x)[u_1(x)+\alpha p(a)u_2(x)]}$ となることを示せ.

(3) $y_1(x)\in C[a,b]$ を Riccati の微分方程式を満たす関数とする. このとき $u'(x)=p(x)y_1(x)u(x)$ となる $u\in C^2[a,b]$ を 1 つ求めなさい.

(4) (3) の設定のもとで階数低下法に基づいて (1) の解を構成し, Riccati の微分方程式の初期値問題の解を書き表せ.

(5) $z(x):=\dfrac{1}{y(x)-y_1(x)}$ に対する微分方程式を解くことで得られるものと一致することを確認せよ.

$p\in C^1[a,b]$ は $p(x)\neq 0$ on $[a,b]$ ならば Riccati の微分方程式の初期値問題の解の存在が証明できたことになる. ただ, 実際には $p\in C[a,b]$ で十分である (正規形の 1 階非線形微分方程式の初期値問題は解が存在する).