1　1階微分方程式の解法 (1)

問題 1.1. $y(x) = c + \int_a^x f(s)\,ds.$

問題 1.2. $z(x) := y_1(x) - y_2(x) \in C[a,b]$ は (a,b) で微分可能な関数であり, $z'(x) = 0$ on (a,b). ところで, 平均値の定理によれば, $z(x) - z(a) = z'(\xi)(x-a)$, $a < \xi < x$ なる ξ の存在がいえるが, $z'(\xi) = 0$ なので, $z(x) - z(a) = 0$. $x \in [a,b]$ は任意だったから, $z(x) = z(a) = 0$.

問題 1.3.

(1) $y(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{4}{3}$.　(2) $y(x) = e^x - \sin x + 2$.　(3) $y(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$.

(4) $y(x) = \tan^{-1} x$.　(5) $y(x) = 2\sqrt{x} - 1$.　(6) $y(x) = x \log x - x$.

問題 1.4. 略. (1) 指数法則のおかげで積分記号下の微分を回避できる. (2) z の微分方程式は問題 1.1 や 1.2 にあるような形になる. このような置き換え方が有効活用できる場面があるのでぜひともやっておこう.

問題 1.5. (1) $y(x) = 2e^{2x} + 2x + 1$. (2) $y(x) = \dfrac{6e^x - 5e^{5-4x}}{5}$. (3) $y(x) = 2e^{3x}(5 - 3\cos x)$. (4) $y(x) = 4e^{x^2-4}$. (5) $y(x) = 3e^{2x^3-1}$. (6) $y(x) = 4 - 3e^{-\frac{x^2}{2}}$. (7) $y(x) = \dfrac{1}{x^6}$. (8) $y(x) = 6x^3 - 3x^2$. (9) $y(x) = -\dfrac{16}{9}e^{\frac{3}{x}-3} + \dfrac{4}{3x} + \dfrac{4}{9}$. (10) $y(x) = -2\sin x + 4e^{\sin x} - 2$. (11) $y(x) = 4\cos x + e^{2-\cos x} - 4$.

問題 1.6. (1) $y(x) = 0$ や $y(x) = \dfrac{1}{27}x^3$ はもちろん解であるが, $\alpha \le 0 \le \beta$ に対し

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{27}(x-\beta)^3 & (x > \beta) \\ 0 & (\alpha \le x \le \beta) \\ \dfrac{1}{27}(x-\alpha)^3(x<\alpha) \end{cases}$$

も解になる. (2) $y(x) = 0$ や $y(x) = x^4$ はもちろん解であるが,

$$y(x) = \begin{cases} x^4 & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0), \end{cases} \qquad y(x) = \begin{cases} 0 & (x > 0) \\ x^4 & (x \le 0) \end{cases}$$

も解になる.

問題 1.7. (1) $y(x) = \tan x$. (2) $y(x) = \dfrac{e^{2x-2} - 1}{e^{2x-2} + 1}$. (3) $y(x) = \dfrac{4}{4 - x^4}$. (4) $y(x) = -\log\left(\dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x^2\right)$. (5) $y(x) = 2\sin\left(\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{\pi}{6}\right)$. (6) $y(x) = \dfrac{e^{x^2} + 2}{2 - e^{x^2}}$

問題 1.8. (1) $y(x) = x + 3$. (2) $y(x) = \sqrt{4x+1} - x$. (3) $y(x) = \dfrac{12x + 6 + e^{4x}(4x-2)}{e^{4x} + 3}$. (4) $y(x) = \dfrac{90x + 85 + e^{4x}(18x + 11)}{8(e^{12x} + 5)}$.

問題 1.9. (1) $y(x) = \sqrt{x(x+3)}$. (2) $y(x) = \dfrac{5 - \sqrt{25 - 4x^2}}{2}$.

$$(3)\ \log(x^2 + xy(x) + y(x)^2) + 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y(x) + x}{\sqrt{3}x}\right) = \log 7 + 2\sqrt{3}\tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

どうやらこれ以上変形できないらしい (mathematica による).