4 定数係数微分方程式 (2)

$A=(a_{ij})_{ij}$ とする.

問題 4.1. (1) ${}^tAB=(a_{ji})_{ij}(b_{jk})_{jk}=\left(\sum_{j=1}^{M}a_{ji}b_{jk}\right)_{ik}$ だから $\mathrm{tr}\,({}^tAB)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}a_{ji}b_{ji}$. 内積である条件は $\langle A,A\rangle\geq 0$, $\langle A,A\rangle=0\Leftrightarrow A=O$, $\langle B,A\rangle=\langle A,B\rangle$, $\langle aA+bB,C\rangle=a\langle A,C\rangle+b\langle B,C\rangle$ をすべて満たすことだが $\mathbb{R}^N$ の内積と同様である.

(2)(3)

$$\begin{aligned}\|AB\|^2&=\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{N}\Big|\sum_{j=1}^{M}a_{ij}b_{jk}\Big|^2\leq\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{M}|a_{ij}|^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{M}|b_{jk}|^2\Big)\quad(\text{Schwarz の不等式})\\&=\sum_{i=1}^{L}\Big(\sum_{j=1}^{M}|a_{ij}|^2\Big)\times\sum_{k=1}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{M}|b_{jk}|^2\Big)=\|A\|^2\|B\|^2.\end{aligned}$$

問題 4.2. ヒント: $|a_{ij}|\leq\|A\|\leq\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}|$.

問題 4.3. (1) 三角不等式や $\|A^n\|\leq\|A\|^n$(問題 4.1(3)) を利用し, 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\|A\|^n$ が絶対収束であることからわかる.

(2) 指数法則より $x=0$ での微分を考えればよい.

$$A-\frac{\exp(hA)-I}{h}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}h^{n-1}A^n$$

からはさみうちの原理により $(\exp(xA))'|_{x=0}=A$ が示される.

(3) $\|A\|<1$ であれば絶対収束する. $B:=\sum_{n=0}^{\infty}A^n$ とおくと $B-AB=I$ が成立する.

問題 4.4. 交換法則を活用すれば, Cauchy 積を考えれば得られる: $\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k$.

$AB\neq BA$ の場合の一例は

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\qquad AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\qquad \exp(A)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\qquad \exp(B)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\exp(A+B)=\begin{pmatrix}\cosh 1&\sinh 1\\\sinh 1&\cosh 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2e}\begin{pmatrix}e^2+1&e^2-1\\e^2-1&e^2+1\end{pmatrix}$$

$$\exp(A)\exp(B)=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\qquad\qquad \exp(B)\exp(A)=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$$

問題 4.5. 定義通り計算すれば $T'(x)=BT(x)=T(x)B$ が証明できる. 次に $U(x):=\exp(-xB)T(x)$ に対し $U'(x)=O$ なので $U(x)$ は定数行列. $U(0)=I$ だから $\exp(-xB)T(x)=I$.

問題 4.6.

(1) $\exp(xA) = \begin{pmatrix} \cosh kx & \dfrac{1}{k}\sinh kx \\ k\sinh kx & \cosh kx \end{pmatrix}$, $\exp(xB) = \begin{pmatrix} \cos kx & \dfrac{1}{k}\sin kx \\ -k\sin kx & \cos kx \end{pmatrix}$,

(2) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{k}\sinh k(x-s)f(s)\,ds.$ $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{k}\sin k(x-s)f(s)\,ds.$ 第 1 成分を見ればよい.

問題 4.7.

(1) $\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{2x}-e^{3x} \\ 0 & e^{3x} \end{pmatrix}$ (2) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3x}+e^{-x} & e^{3x}-e^{-x} \\ e^{3x}-e^{-x} & e^{3x}+e^{-x} \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 4e^{-3x}-3e^{-2x} & 12e^{-2x}-12e^{3x} \\ e^{-3x}-e^{-2x} & 4e^{-2x}-3e^{-3x} \end{pmatrix}$

(4) $\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 5e^{5x}+3e^{-3x} & 15e^{-3x}-15e^{5x} \\ e^{-3x}-e^{5x} & 3e^{5x}+5e^{-3x} \end{pmatrix}$ (5) $\dfrac{e^x}{2}\begin{pmatrix} 2\cos 2x+\sin 2x & -5\sin 2x \\ \sin 2x & 2\cos 2x-\sin 2x \end{pmatrix}$

(6) $\dfrac{e^{-4x}}{3}\begin{pmatrix} 3\cos 3x-\sin 3x & 10\sin 3x \\ -\sin 3x & 3\cos 3x+\sin 3x \end{pmatrix}$ (7) $e^{2x}\begin{pmatrix} \cos x+2\sin x & -5\sin x \\ \sin x & \cos x-2\sin x \end{pmatrix}$

(8) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 6e^{-x}-3e^{2x} & 3e^{-x}-3e^{2x} & 6e^{2x}-6e^{-x} \\ 2e^{2x}-2e^{-x} & 4e^{2x}-e^{-x} & 2e^{-x}-2e^{2x} \\ 2e^{-x}-2e^{2x} & e^{-x}-e^{2x} & 5e^{2x}-2e^{-x} \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} -2e^{3x}+e^{2x}+2e^{x} & e^{3x}-e^{2x} & 3e^{3x}-e^{2x}-2e^{x} \\ e^{x}-e^{2x} & e^{2x} & e^{2x}-e^{x} \\ -2e^{3x}+e^{2x}+e^{x} & e^{3x}-e^{2x} & 3e^{3x}-e^{2x}-e^{x} \end{pmatrix}$