5 ベクトル値微分方程式の解の一意存在

問題 5.1. 可換性により次に注意せよ.

$$A(y)\Big(\int_\alpha^\beta A(x)\,dx\Big) = \int_\alpha^\beta A(y)A(x)\,dx = \int_\alpha^\beta A(x)A(y)\,dx = \Big(\int_\alpha^\beta A(x)\,dx\Big)A(y).$$

さて,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \Big(I + \int_a^x A(s)\,ds\Big)y_0, \\ y_2(x) &= \Big(I + \int_a^x A(t)\Big(I + \int_a^t A(s)\,ds\Big)\,dt\Big)y_0, = \Big(I + \int_a^x A(s)\,ds + \int_a^x A(t)\int_a^t A(s)\,ds\,dt\Big)y_0. \end{aligned}$$

$(P(x)Q(x))' = P'(x)Q(x) + P(x)Q'(x)$ であり $\Big(\int_a^x A(s)\,ds\Big)' = A(x)$ だから

$$\int_a^x A(t)\int_a^t A(s)\,ds\,dt = \int_a^x \Big(\int_a^t A(s)\,ds\Big)'\Big(\int_a^t A(s)\,ds\Big)\,dt = \frac{1}{2}\Big(\int_a^x A(s)\,ds\Big)^2.$$

このようにして帰納法により $y_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\Big(\int_a^x A(s)\,ds\Big)^k y_0$ が証明される. 次に

$$\begin{aligned} \|y_n(x) - y_{n-1}(x)\| &= \Big\|\frac{1}{n!}\Big(\int_a^x A(s)\,ds\Big)^n y_0\Big\| \le \frac{1}{n!}\Big\|\Big(\int_a^x A(s)\,ds\Big)^n\Big\|\,\|y_0\| \\ &\le \frac{\|y_0\|}{n!}\Big\|\int_a^x A(s)\,ds\Big\|^n \le \frac{\|y_0\|}{n!}\Big(\int_a^x \|A(s)\|\,ds\Big)^n \le \frac{\|y_0\|}{n!}\Big(\int_a^b \|A(s)\|\,ds\Big)^n \end{aligned}$$

従って $\{y_n(x)\}$ は Cauchy 列 ($\|y_m(x) - y_n(x)\|$ を考えよ) であり, 一様収束することが分かる.

問題 5.2. 一言でいえば, $g(x) \in C([a,b];\mathbb{R}^N)$ ならば ${}_a^x g(s)\,ds \in C^1([a,b];\mathbb{R}^N)$ であることからわかる (微積分学の基本定理).

問題 5.3. (1) $(\Phi u)(x) - (\Phi v)(x) = \int_a^x A(s)[u(s) - v(s)]\,ds$ だから

$$\|(\Phi u)(x) - (\Phi v)(x)\| \le \int_a^x \|A(s)[u(s) - v(s)]\|\,ds \le \int_a^x \|A(s)\|\,\|u(s) - v(s)\|\,ds.$$

A の連続性より有界であることがわかるので, $\|A(x)\| \le M$ on $[a,b]$ なる $M > 0$ がある. また $\|\cdot\|_\lambda$ の定義より

$$e^{-\lambda s}\|u(s) - v(s)\| \le \|u - v\|_\lambda \quad \forall\, s \in [a,b].$$

以上から

$$\|(\Phi u)(x) - (\Phi v)(x)\| \le \int_a^x M e^{\lambda s}\|u - v\|_\lambda\,ds \le M\|u - v\|_\lambda \frac{e^{\lambda x} - e^{\lambda a}}{\lambda}.$$

それゆえに

$$\|\Phi u - \Phi v\|_\lambda = \sup_{1 \le x \le b} e^{-\lambda x}\|(\Phi u)(x) - (\Phi v)(x)\| \le \sup_{1 \le x \le b} M\|u - v\|_\lambda \frac{1 - e^{-\lambda(x-a)}}{\lambda} = \frac{M}{\lambda}\|u - v\|_\lambda.$$

$\lambda > M$ ならば縮小写像である ($c = \frac{M}{\lambda}$).

(2) $\|u_n - u_{n-1}\|_\lambda \le c^n\|u_1 - u_0\|_\lambda$ だから Cauchy 列であることがわかる.

問題 5.4. (1) まず内積に対する微分公式 $(\langle f(x), g(x)\rangle)' = \langle f'(x), g(x)\rangle + \langle f(x), g'(x)\rangle$ に注意する.

$$z'(x) = 2\langle y_1'(x) - y_2'(x), y_1(x) - y_2(x)\rangle = 2\langle A(x)[y_1(x) - y_2(x)], y_1(x) - y_2(x)\rangle.$$

Cauchy-Schwarz の不等式から

$$\begin{aligned}\langle A(x)[y_1(x) - y_2(x)], y_1(x) - y_2(x)\rangle &\le \|A(x)[y_1(x) - y_2(x)]\|\,\|y_1(x) - y_2(x)\|\\ &\le \|A(x)\|\,\|y_1(x) - y_2(x)\|^2.\end{aligned}$$

A の連続性より $\|A(x)\| \le M$ となる $M > 0$ があるから $z'(x) \le 2Mz(x)$ となる.

(2) $(e^{-2Mx}z(x))' = e^{-2Mx}(z'(x) - 2Mz(x)) \le 0$ だから

$$e^{-2Mx}z(x) - e^{-2Ma}z(a) = \int_a^x (e^{-2Ms}z(s))'\,ds \le \int_a^x 0\,dx = 0.$$

従って $z(x) \le z(a)e^{2Mx}$. ところで $z(a) = \|y_1(a) - y_2(a)\|^2 = 0$, $z(x) \ge 0$ だから $0 \le z(x) \le z(a)e^{2M(x-a)} = 0$. $z(x) = 0$ on $[a, b]$ だから $y_1(x) = y_2(x)$ on $[a, b]$.

(3) (1)(2) より得られる $\|y_m(x) - y_n(x)\| \le e^{Mx}\|y_{0m} - y_{0n}\|$ を利用せよ.

(4) $z(x) := \|y_m(x) - y_n(x)\|^2$ に対して

$$\begin{aligned}z'(x) &= 2\langle y_m'(x) - y_n'(x), y_m(x) - y_n(x)\rangle\\ &= 2\langle A(x)[y_m(x) - y_n(x)] + [F_m(x) - F_n(x)], y_m(x) - y_n(x)\rangle\\ &\le 2\|A(x)\|\,\|y_m(x) - y_n(x)\|^2 + 2\|F_m(x) - F_n(x)\|\,\|y_m(x) - y_n(x)\|\\ &\le (2M + 1)\,\|y_m(x) - y_n(x)\|^2 + \|F_m(x) - F_n(x)\|^2.\end{aligned}$$

従って $z'(x) \le (2M+1)z(x) + f_{mn}(x)$ $(f_{mn}(x) := \|F_m(x) - F_n(x)\|^2)$. $(e^{-(2M+1)x}z(x))' = e^{-(2M+1)x}(z'(x) - (2M+1)z(x)) \le e^{-(2M+1)x}f_{mn}(x)$. これより

$$e^{-(2M+1)x}z(x) - e^{-(2M+1)a}z(a) \le \int_a^x e^{-(2M+1)s}f_{mn}(s)\,ds.$$

$z(a) = 0$ に注意すると

$$z(x) \le \int_a^x e^{(2M+1)(x-s)}f_{mn}(s)\,ds. \quad \therefore \|y_m(x) - y_n(x)\|^2 \le \int_a^x e^{(2M+1)(x-s)}\|F_m(s) - F_n(s)\|^2\,ds.$$

問題 5.5. $k \in C([a, b] \times [a, b])$ に注意せよ. したがって $|k(x, y)| \le M\ \forall\, x, y \in [a, b]$ となる $M > 0$ が存在する.

$$(\Phi u)(x) - (\Phi v)(x) = \int_a^x k(x, y)[u(y) - v(y)]\,dy$$

だから,

$$|(\Phi u)(x) - (\Phi v)(x)| \le \int_a^x M|u(y) - v(y)|\,dy.$$

ここで問題 5.3 と同じノルムを考えれば $|u(y) - v(y)| \le e^{\lambda y}\|u - v\|_\lambda$ だから

$$|(\Phi u)(x) - (\Phi v)(x)| \le \int_a^x Me^{\lambda y}\|u - v\|\,dy = \frac{M}{\lambda}\|u - v\|_\lambda(e^{\lambda x} - e^{\lambda a}).$$

$$\|\Phi u - \Phi v\|_\lambda = \max_{a \le x \le b} e^{-\lambda x}|(\Phi u)(x) - (\Phi v)(x)| \le \max_{a \le x \le b} \frac{M}{\lambda}\|u - v\|_\lambda(1 - e^{-\lambda(x-a)}) = \frac{M}{\lambda}\|u - v\|_\lambda.$$

$\lambda > M$ であれば Φ は縮小写像となり, $C[a, b]$ の完備性から不動点 $u = \Phi u$ が存在する.

(3) $u_n := u[f_n]$, $u := u[f]$ とする.

$$\begin{aligned}|u_n(x)-u(x)| &\le \int_a^x |k(x,y)|\,|u_n(y)-u(y)|\,dy + |f_n(x)-f(x)| \\ &\le \int_a^x M\,|u_n(y)-u(y)|\,dy + |f_n(x)-f(x)|.\end{aligned}$$

ノルムを考えれば

$$\begin{aligned}\int_a^x M\,|u_n(y)-u(y)|\,dy + |f_n(x)-f(x)| &\le \int_a^x Me^{\lambda y}\|u_n-u\|_\lambda + e^{\lambda x}\|f_n-f\|_\lambda \\ &\le \frac{M}{\lambda}\|u_n-u\|_\lambda(e^{\lambda x}-e^{\lambda a}) + e^{\lambda x}\|f_n-f\|_\lambda.\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}\|u_n-u\|_\lambda &= \max_{a\le x\le b} e^{-\lambda x}|u_n(x)-u(x)| \\ &\le \max_{a\le x\le b}\Big[\frac{M}{\lambda}\|u_n-u\|_\lambda(1-e^{-\lambda(x-a)}) + \|f_n-f\|_\lambda\Big] = \frac{M}{\lambda}\|u-v\|_\lambda + \|f_n-f\|_\lambda.\end{aligned}$$

$\lambda > M$ であれば

$$\Big(1-\frac{M}{\lambda}\Big)\|u_n-u\|_\lambda \le \|f_n-f\|_\lambda. \quad \|u_n-u\|_\lambda \le \Big(1-\frac{M}{\lambda}\Big)^{-1}\|f_n-f\|_\lambda.$$

これより $f_n \to f (n\to\infty)$ ならば $u[f_n] \to u[f] (n\to\infty)$.

問題 5.6. 行列式の微分の性質に注意する.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x)\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} y'_{11}(x) & y'_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x)\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) \\ y'_{21}(x) & y'_{22}(x)\end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}(x)y_{11}(x)+a_{12}(x)y_{21}(x) & a_{11}(x)y_{12}(x)+a_{12}(x)y_{22}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x)\end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) \\ a_{21}(x)y_{11}(x)+a_{22}(x)y_{21}(x) & a_{21}(x)y_{22}(x)+a_{12}(x)y_{22}(x)\end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}(x)y_{11}(x) & a_{11}(x)y_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x)\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & y_{12}(x) \\ a_{22}(x)y_{21}(x) & a_{22}(x)y_{22}(x)\end{vmatrix} \\ &= (a_{11}(x)+a_{22}(x))\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x)\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

問題 5.7. $Y(x) := (y_1(x), y_2(x), \cdots, y_N(x))$ とおけば正規化された基本解系は

$$\{Y(x)Y(a)^{-1}e_1, Y(x)Y(a)^{-1}e_2, \cdots, Y(x)Y(a)^{-1}e_N\}.$$