6 微分不等式と Gronwall の不等式・解のアプリオリ評価や一意性

問題 6.1. $z(x) := y(x)\exp\Big(-\int_a^x g(s)\,ds\Big)$ とおけば $z'(x) \le 0$. この両辺を積分すればよい. $f(x)$ が追加された場合には $z'(x) \le f(x) + \exp\Big(-\int_a^x g(s)\,ds\Big)$. この両辺を積分すれば得られる.

問題 6.2. $z(x) := \int_a^x g(s)y(s)\,ds$ とおけば $z'(x) = g(x)y(x) \le g(x)(f(x)+z(x))$. $w(x) := z(x)\exp\Big(-\int_a^x g(s)\,ds\Big)$ とおいて w の微分不等式を考えればよい.

問題 6.3. $\varepsilon > 0$ のおかげで $u_\varepsilon(x) = \sqrt{u(x)+\varepsilon} \in C^1[a,b]$ がいえて証明ができる.

(1) $y(x)^2 \le u(x)$ および $u'(x) = g(x)y(x)$ に注意.

(2) $u_\varepsilon'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)+\varepsilon}} \le \dfrac{2g(x)\sqrt{u(x)}}{2\sqrt{u(x)+\varepsilon}} \le g(x)$.

(3) (2) の両辺を積分する. $y(x) \le \sqrt{u(x)} \le u_\varepsilon(x)$ に注意.

問題 6.4. $z_\varepsilon(x) := (y(x)+\varepsilon)^{1-\alpha}$ とすると $z_\varepsilon \in C^1[a,b]$ で.

$$\begin{aligned}
z_\varepsilon'(x) &= (1-\alpha)(y(x)+\varepsilon)^{-\alpha}y'(x)\\
&\le [f(x)y(x) + g(x)y(x)^\alpha](y(x)+\varepsilon)^{-\alpha}\\
&= f(x)\Big(\frac{y(x)}{y(x)+\varepsilon}\Big)(y(x)+\varepsilon)^{1-\alpha} + g(x)\Big(\frac{y(x)}{y(x)+\varepsilon}\Big)^\alpha\\
&\le f(z)z_\varepsilon(x) + g(x) - \varepsilon f(x)(y(x)+\varepsilon)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

$g_\varepsilon(x) := g(x) - \varepsilon f(x)(y(x)+\varepsilon)^{-\alpha}$ とおけば $z'(x) \le f(x)z(x) + g_\varepsilon(x)$ が得られたことになる. 問題 6.1 と同様に

$$z_\varepsilon(x) \le z_\varepsilon(a)\exp\Big(\int_a^x f(s)\,ds\Big) + \int_a^x \exp\Big(\int_t^x f(s)\,ds\Big)g_\varepsilon(t)\,dt.$$

ここで $z_\varepsilon(x) \to z(x) := y(x)^{1-\alpha}$ $(\varepsilon \to +0)$ は一様収束である. また, $|g_\varepsilon(x) - g(x)| = \varepsilon|f(x)|(y(x)+\varepsilon)^{-\alpha} \le \varepsilon^{1-\alpha}|f(x)|$. したがって

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_a^x \exp\Big(\int_t^x f(s)\,ds\Big)g_\varepsilon(t)\,dt - \int_a^x \exp\Big(\int_t^x f(s)\,ds\Big)g(t)\,dt\Big|\\
&\le \varepsilon^{1-\alpha}\int_a^x \exp\Big(\int_t^x f(s)\,ds\Big)|f(t)|\,dt \le \varepsilon^{1-\alpha}\int_a^b \exp\Big(\int_a^b |f(s)|\,ds\Big)|f(t)|\,dt \to 0\ (\varepsilon \to +0).
\end{aligned}$$

これを先ほどの不等式に適用すれば $(\varepsilon \to +0)$, 結論の不等式が得られる.

ちなみに $\alpha > 1$ のときは $y(x) \ge 0$, $g(x) > 0$ on $[a,b]$ に対し $(\alpha-1)y'(x) \le f(x)y(x) - g(x)y(x)^\alpha$ ならば

$$y(x) \le \Big(\int_a^x \exp\Big(-\int_t^x f(s)\,ds\Big)g(t)\,dt\Big)^{-1/(\alpha-1)}$$

が証明できる.

問題 6.5. 微分不等式から

$$\Big[u(s)\exp\Big(-\int_t^s f(r)\,dr\Big)\Big]_s \le g(s)\exp\Big(-\int_t^s f(r)\,dr\Big) \le g(s).$$

s について $s = \tau$ から $s = t+1$ まで積分すると

$$u(t+1)\exp\Big(-\int_t^{t+1} f(r)\,dr\Big) - u(\tau)\exp\Big(-\int_t^\tau f(r)\,dr\Big) \le \int_\tau^{t+1} g(s)\,ds.$$

整理すると

$$u(t+1) \leq u(\tau)\exp\Big(\int_\tau^{t+1} f(r)\,dr\Big) + \exp\Big(\int_\tau^{t+1} f(r)\,dr\Big)\int_\tau^{t+1} g(s)\,ds \leq (u(\tau)+c_3)e^{c_1}.$$

今度は τ について $\tau=t$ から $\tau=t+1$ まで積分すると $u(t+1) \leq (c_2+c_3)e^{c_1}$ がいえる．

問題 6.6. (1) C は $\alpha C^p = \beta$ となる数である．$T := \max\{t>0 | u(t) \leq C\} < \infty$ とおくと $\varepsilon > 0$ に対し $u(T+\varepsilon) > C$．このとき $u'(T+\varepsilon) \geq \beta - \alpha u(T+\varepsilon)^p < 0$．また平均値の定理より $u(T+\varepsilon) - u(T) = u'(T+\varepsilon\theta)\varepsilon$ となる $\theta \in (0,1)$ が存在する．したがって $u(T+\varepsilon) - u(T) < 0$．ところがこれは $u(T+\varepsilon) > C \geq u(T)$ に矛盾する．

(2) $u(T) = C$ となる $T > 0$ があったとすると，$u_1(t) := u(T+t)$ が同じ微分不等式を満たし，$u_1(0jy) \leq C$ だから (1) に帰着される (なお，$T=\infty$ の場合もあり得る)．

(3) $v'(t) = u'(t) \leq \beta - \alpha u(t)^p = \alpha C^p - \alpha(v(t)+C)^p$．ここで $(x+y)^p \geq x^p + y^p$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $p>1$) なので $v'(t) \leq C^p - \alpha(v(t)^p + C^p) = -\alpha v(t)^p$．

(4) $v(t) > 0$ on $[0,T)$ としてよい．$[0, T-\delta]$ において

$$(v(t)^{1-p})' = -(p-1)v(t)^{-p}v'(t) \geq \alpha(p-1)v(t)^{-p}v(t)^p = \alpha(p-1).$$

なので $v(t-\delta)^{1-p} \geq v(0)^{1-p} + (p-1)\alpha(t-\delta) \geq (p-1)\alpha(t-\delta)$．これより $v(t-\delta) \leq ((p-1)\alpha(t-\delta))^{-1/(p-1)}$．$\delta \to +0$ とすれば $v(t) \leq ((p-1)\alpha t)^{-1/(p-1)}$．

$t \geq T$ のときは $u(t) \leq C$ なので，結果として $u(t) = v(t) + C \leq C + ((p-1)\alpha t)^{-1/(p-1)}$．

問題 6.7. (1) $y_1 = \dfrac{1}{n^2}$, $y_2 = 0$ とすると

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \frac{1}{n^2}. \quad \frac{|f(x,y_1)-f(x,y_2)|}{|y_1-y_2|} = n.$$

$n \in \mathbb{N}$ は任意だから $\dfrac{|f(x,y_1)-f(x,y_2)|}{|y_1-y_2|} \leq L(x)\ \forall\, y_1, y_2 \in [0,\infty)$ となるような $L(x) > 0$ は存在しない．

(2) $y_1 = \dfrac{1}{n}$, $y_2 = \dfrac{1}{2n}$ とすると

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \frac{1}{1+x^2} \times \frac{\log n - \log(2)}{2n}. \quad \frac{|f(x,y_1)-f(x,y_2)|}{|y_1-y_2|} = \frac{\log n - \log 2}{1+x^2}.$$

$n \in \mathbb{N}$ は任意だから $\dfrac{|f(x,y_1)-f(x,y_2)|}{|y_1-y_2|} \leq L(x)\ \forall\, y_1, y_2 \in (0,\infty)$ となるような $L(x) > 0$ は存在しない．

問題 6.8. (1) $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq |y_1 - y_2|$．

(2) $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq \Big|\displaystyle\int_{y_2}^{y_1} -xe^{-xs}\,ds\Big| \leq |x|\,|y_1-y_2| \leq |y_1-y_2|$．

問題 6.9. 基本的には次の 2 つの方針で Gronwall の不等式ができる状態にする．

積分形: $y_j(x) = y_j(a) + \displaystyle\int_a^x f(t, y_j(t))\,dt$ だから

$$\begin{aligned}|y_1(x) - y_2(x)| &= \Big|\int_a^x [f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))]\,dt\Big| \leq \Big|\int_a^x |f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))|\,dt\Big| \\ &\leq \Big|\int_a^x L(t)\,|y_1(t)-y_2(t)|\,dt\Big|.\end{aligned}$$

したがって $z(x) := |y_1(x) - y_2(x)|$ とおけば $z(x) \le \int_a^x L(t)\,z(t)\,dt.$

微分形: $z(x) := (y_1(x) - y_2(x))^2$ とおくと

$$\begin{aligned}z'(x) &= 2(y_1(x) - y_2(x))(y_1'(x) - y_2'(x)) = 2(y_1(x) - y_2(x))[f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))] \\ &\le 2|y_1(x) - y_2(x))|\,|f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| \le 2|y_1(x) - y_2(x))|\,L(x)\,|y_1(x) - y_2(x)| \\ &= 2L(x)z(x).\end{aligned}$$

あとは $L(x)$ を求めればよい.

(1) $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \Big|\int_{y_2}^{y_1} \cos t\,dt\Big| \le \Big|\int_{y_2}^{y_1} 1\,dt\Big| = |y_1 - y_2|.$

(2) $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \Big|\int_{y_2}^{y_1} -2txe^{-t^2}\,dt\Big| \le x\Big|\int_{y_2}^{y_1} \frac{1}{\sqrt{2e}}\,dt\Big| \le \frac{a}{\sqrt{2e}}|y_1 - y_2|.$

(3) $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \Big|\int_{y_2}^{y_1} \frac{t}{\sqrt{x}\sqrt{1+t^2}}\,dt\Big| \le \frac{1}{\sqrt{x}}\Big|\int_{y_2}^{y_1} 1\,dt\Big| \le \frac{1}{\sqrt{x}}|y_1 - y_2|.$

(ε, x) で積分して$\varepsilon \to +0$ とせよ.

(4) $$\begin{aligned}|f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= \Big|\int_{y_2}^{y_1} -\frac{3xt+4}{(\sqrt{4+t^2})^3}\,dt\Big| \le \Big|\int_{y_2}^{y_1} \frac{3x\sqrt{4+t^2}+4}{(\sqrt{4+t^2})^3}\,dt\Big| \\ &\le \Big|\int_{y_2}^{y_1} (3x+1)\,dt\Big| \le (3a+1)|y_1 - y_2|.\end{aligned}$$

問題 6.10. (1) $|f(y_1) - f(y_2)| = \Big|\int_{y_1}^{y_2} -\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}\,dt\Big| \le \Big|\int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{3}\Big(\frac{c}{2}\Big)^{-\frac{2}{3}}\,dt\Big| = \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{c}\Big)^{\frac{2}{3}}|y_1 - y_2|.$

(2) $y_1(x)$, $y_2(x)$ が解であるとすると, 連続性から

$$\forall\,\varepsilon > 0, \exists \delta_j = \delta_j(\varepsilon) > 0;\ |x - 0| \le \delta_j \Rightarrow |y_j(x) - c| \le \varepsilon.$$

$\varepsilon := \frac{c}{2}$, $\delta := \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$ とおけば $0 \le x \le \delta$ ならば $0 \le |y_j(x) - c| \le \frac{c}{2}$. したがって $\frac{c}{2} \le y_j(x) \le \frac{3}{2}c \le 2c$ となる. あとは前問と同様にすればよい.

問題 6.11. (1) $p, q \in C[a, b]$ だから $|p(x)| \le M_p$, $|q(x)| \le M_q$ となる $M_p, M_q > 0$ がある.

$$\begin{aligned}|F(x, y_1) - F(x, y_2)| &\le |p(x)|\,|y_1^2 - y_2^2| + |q(x)|\,|y_1 - y_2| \\ &\le M_p(|y_1| + |y_2|)|y_1 - y_2| + M_q|y_1 - y_2| \\ &\le (4MM_p + M_q)|y_1 - y_2|.\end{aligned}$$

(2) $y \in C[a, b]$ だから $M > 0$ に対しある $\delta > 0$ があって $|x - a| < \delta$ のとき $|y(x) - y(a)| < M$. $y(a) = c$, $|c| < M$ なので $|y(x)| \le |y(x) - y(a)| + |y(a)| \le M + |c| < 2M$. $\varepsilon := \delta$ とすればよい.

(3) y_1, y_2 がともに解であるとすると $M > |c|$ に対し $\varepsilon > 0$ があって $|y_1(x)| \le 2M$, $|y_2(x)| \le 2M$ on $[a, a+\varepsilon]$. (1) より

$$\begin{aligned}|y_1(x) - y_2(x)| &\le \int_a^x |[y_1(s) - y_2(s)]'|\,ds = \int_a^x |F(s, y_1(s)) - F(s, y_2(s))|\,ds \\ &\le \int_a^x L\,|y_1(s) - y_2(s)|\,ds.\end{aligned}$$

問題 6.12. まず, $y'(x) = p(x)y(x)^2 + q(x)y(x) + r(x) \le q(x)y(x) + r(x)$ だから Gronwall の不等式 (微分形) により

$$y(x) \le y(a)\exp\Big(\int_a^x q(s)\,ds\Big) + \int_a^x \exp\Big(\int_t^x q(s)\,ds\Big) r(t)\,dt.$$

右辺の関数は連続だから最大値が存在する. それを $M > 0$ とおけば $y(x) \le M$.

次に, $y'(x) = p(x)y(x)^2 + q(x)y(x) + r(x) \ge p(x)M^2 + q(x)y(x) + r(x)$ だから

$$\begin{aligned}\Big(y(x)\exp\Big(-\int_a^x q(s)\,ds\Big)\Big)' &= \exp\Big(-\int_a^x q(s)\,ds\Big)(y'(x) - q(x)y(x)) \\ &\ge \exp\Big(\int_a^x q(s)\,ds\Big)[p(x)M^2 + r(x)].\end{aligned}$$

両辺を積分して整理すれば

$$y(x) \ge y(a)\exp\Big(\int_a^x q(s)\,ds\Big) + \int_a^x \exp\Big(\int_t^x q(s)\,ds\Big)[p(t)M^2 + r(t)]\,dt.$$

右辺の関数は連続だから最小値が存在する. それを N とおけば $y(x) \ge N$.