7 基本解系と階数低下法

問題 7.1. (1) $v(x) = v(-x)$ の両辺を微分せよ. (2) まず $u(x)$ が解ならば $u(-x)$ も解であることが示せる. 一方, $u_1(0) = 1$, $u_1'(0) = 0$ となる解 u_1 や $u_2'(0) = 0$, $u_2'(0) = 1$ となる解 u_2 は存在する. したがって $v_1(x) := \dfrac{u_1(x) - u_1(-x)}{2}$, $v_2(x) := \dfrac{u_2(x) + u_2(-x)}{2}$ も解になるが $v_1(0) = 0$, $v_1'(0) = 0$, $v_2(0) = 0$, $v_2'(0) = 0$ なので $v_1(x) = 0$, $v_2(x) = 0$ となる.

問題 7.2.

(1) $z''(x) + \dfrac{2v'(x) + p_1(x)v(x)}{v(x)} z'(x) = \dfrac{f(x)}{v(x)}$.

(2) $z(a) = \dfrac{\alpha}{v(a)}$, $z'(a) = \dfrac{\beta v(a) - \alpha v'(a)}{v(a)^2}$.

(3) $w(x) = \dfrac{\beta v(a) - \alpha v'(a)}{v(x)^2} \exp\Bigl(-\displaystyle\int_a^x p_1(s)\,ds\Bigr) + \dfrac{1}{v(x)^2}\displaystyle\int_a^x \exp\Bigl(-\int_s^x p_1(r)\,dr\Bigr) v(s)f(s)\,ds$.

(4)
$$y(x) = \frac{\alpha}{v(a)}v(x) + [\beta v(a) - \alpha v'(a)] \int_a^x \frac{v(x)}{v(s)^2} \exp\Bigl(-\int_a^s p_1(r)\,dr\Bigr)\,ds$$
$$+ v(x)\int_a^x \frac{1}{v(t)^2}\int_a^t \exp\Bigl(-\int_s^x p_1(r)\,dr\Bigr) v(s)f(s)\,dsdt.$$

(5)
$$u_1(x) = \frac{v(x)}{v(a)} - \int_a^x \frac{v'(a)v(x)}{v(s)^2} \exp\Bigl(-\int_a^s p_1(r)\,dr\Bigr)\,ds,$$
$$u_2(x) = \int_a^x \frac{v(a)v(x)}{v(s)^2} \exp\Bigl(-\int_a^s p_1(r)\,dr\Bigr)\,ds.$$

補足 (正規化). $x = a$ で正規化された基本解系を, 単なる基本解系 $\{y_1(x), y_2(x)\}$ から作るには問題 5.7 より

$$\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}^{-1}.$$

転置行列を考えてあげれば

$$\begin{pmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ y_2(a) & y_2'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x) & u_1'(x) \\ u_2(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

これは連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の形と見れるので, クラーメルの公式より

$$u_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(a) \\ y_2(x) & y_2'(a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ y_2(a) & y_2'(a) \end{vmatrix}}, \quad u_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(a) & y_1(x) \\ y_2(a) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ y_2(a) & y_2'(a) \end{vmatrix}}.$$

転置したのを戻して Wronskian を用いれば

$$u_1(x) = \frac{1}{W_{y_1,y_2}(a)} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix}, \quad u_2(x) = \frac{1}{W_{y_1,y_2}(a)} \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}.$$

問題 7.3.

(1) $(x^2 + 4)y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$.

(2) $-(2x - 1)y''(x) + 2y'(x) + (2x - 3)y(x) = 0$.

(3) $-(x^4 + 4x^2 - 1)y''(x) + 4x(x^2 + 2)y'(x) - 2(3x^2 + 1)y(x) = 0$

問題 7.4. (1) $a=-2$. (2) $z(x)=C_1x^2+C_2$. $u_2(x)=(C_1x^2+C_2)e^{-2x}$. (3) $\Big\{x^2e^{2-2x}, \dfrac{x^2-1}{2}e^{-2x+2}\Big\}$.

問題 7.5. (2) $z(x)=C_1x+C_2$. $u_2(x)=(C_1x+C_2)\cos x$. (3) $y(x)=(x^4+2x-1)\cos x$.

問題 7.6. (2) $\Big\{\sin x, \dfrac{\sin x}{x}\Big\}$. (3) $y(x)=\dfrac{3x^4-4x^3+27x^2-12x+18}{6x}\sin x$.

問題 7.7. (2) $\Big\{e^{-3x}\sqrt{x}, \dfrac{e^{-3x}}{\sqrt{x}}\Big\}$.

問題 7.8. (1)(2) 次に注意せよ.

$$y'(x)+p(x)y^2+q(x)y(x)+r(x)=\frac{u''(x)+\Big(q(x)-\dfrac{p'(x)}{p(x)}\Big)u'(x)+p(x)r(x)u(x)}{p(x)u(x)}.$$

$u(x):=u_1(x)+p(a)\alpha u_2(x)$ とおくとき $y(x)=\dfrac{u'(x)}{p(x)u(x)}$, $y(a)=\alpha$ に注意.

(3) $u(x)=\exp\Big(\displaystyle\int_a^x p(s)y_1(s)\,ds\Big)$.

(4) $u(a)=1$ および $u'(a)=p(a)y_1(a)$ に注意する. 問題 7.2 において $p_1(x):=q(x)-\dfrac{p'(x)}{p(x)}$, $p_2(x):=p(x)r(x)$ とする. 初期条件を $v(a)=1$, $v'(a)=p(a)\alpha$ とする解は

$$\begin{aligned} v(x)&=u(x)+p(a)(\alpha-y_1(a))\int_a^x\frac{u(x)}{u(s)^2}\exp\Big(-\int_a^s p_1(r)\,dr\Big)\,ds\\ &=\exp\Big(\int_a^x p(s)y_1(s)\,ds\Big)\Big[1+(\alpha-y_1(a))\int_a^x p(s)\exp\Big(-\int_a^s[2p(r)y_1(r)+q(r)]\,dr\Big)\,ds\Big].\end{aligned}$$

ゆえに $y(x)=\dfrac{v'(x)}{p(x)v(x)}$ が解となる.

(5) 次に注意せよ.

$$y'(x)+p(x)y^2+q(x)y(x)+r(x)=\frac{-z'(x)+(2p(x)y_1(x)+q(x))z(x)+p(x)}{z(x)^2}$$

$z(a)=\dfrac{1}{\alpha-y_1(a)}$ に注意すれば

$$z(x)=\frac{1}{\alpha-y_1(a)}\exp\Big(\int_a^x[2p(s)y_1(s)+q(s)]\,ds\Big)+\int_a^x\exp\Big(\int_a^r[2p(r)y_1(r)+q(r)]\,dr\Big)p(s)\,ds.$$

ゆえに $y(x)=y_1(x)+\dfrac{1}{z(x)}$ が解となる.