

1 行列の演算

問題 1.1. 行列 A は 6×4 行列であり, (i, j) 成分は $ij + 3i - 2j$ である.

- (1) A を書き表しなさい. (2) 21 がある成分は何か答えなさい.

問題 1.2. 次の計算をしなさい.

$$(1) 2 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -2 & -3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(2) 3 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & -3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 1.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ とする. 以下の行列を計算しなさい.

- (1) tA (2) $B + {}^tB$ (3) $({}^tA)A$ (4) ${}^tB^tA$ (5) ${}^t(AB)$

問題 1.4. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 8 & -2 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$ を満たすような x, y を求めなさい.

応用問題

問題 1.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 4 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. $2X + 3Y = 5A$, $3X + 5Y = 4B$ を満たす X, Y を求めなさい.

行列の積には交換法則は成立しないが, 結合法則 $(AB)C = A(BC)$ は成立する (これを ABC と書くことにする). また, A が正方行列のとき, $A^2 = AA$, $A^3 = AA^2 = A^2A$, 一般に $A^n = AA^{n-1} = A^{n-1}A$ が計算できる.

問題 1.6. 次の行列 A に対し, $A^2, A^3, \dots$ を求めることで A^n を求めなさい.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 1.7. 次の各問いに答えなさい.

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$ (Cayley-Hamilton の定理) を示せ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ のとき, $B = A^3 - 3A^2$ を求めなさい.

(3) $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - 6A + 7E = O$ を満たすとき, 実数 a, d を求めなさい.