

4 正則行列

問題 4.1. 次の逆行列を求めなさい.

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}$$

問題 4.2. 次の逆行列を基本変形を用いて求めなさい.

$$\begin{array}{llll} (1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -8 \end{pmatrix} & (4) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \\ (5) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} & (6) \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} & (7) \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} & (8) \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ (9) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & (10) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} & (11) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 7 & -9 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} & (12) \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 5 & -6 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

問題 4.3. 次の逆行列を求めなさい.

$$\begin{array}{lll} (1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ (4) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} & (5) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (6) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

応用問題

問題 4.4. A を m 次正則行列, B を n 次正則行列, D を $m \times n$ 行列とする. このとき, $X = \begin{pmatrix} A & D \\ O & B \end{pmatrix}$ は正則であることを示しなさい (具体的に X^{-1} を X に似た形で作ってみよ). また, X^{-1} の表示を利用することで以下の行列の逆行列を求めなさい.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

(当然だが, 掃き出しによる方法でも計算できる).