

5 行列式の基本計算

問題 5.1. 次の行列式を求めなさい.

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 11 & -13 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} x-3 & -2 \\ 2 & x+3 \end{vmatrix} \quad (5) \begin{vmatrix} x+5 & 6 \\ 6 & x+3 \end{vmatrix}$$

問題 5.2. 次の行列式を求めなさい.

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \\ 8 & 6 & 9 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ -7 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 7 & -5 & -2 \\ 5 & -4 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} 6 & -4 & -3 \\ 3 & 5 & 7 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (6) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad (7) \begin{vmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} \quad (8) \begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(9) \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 1 \\ -2 & x & -3 \\ -1 & 3 & x-1 \end{vmatrix} \quad (10) \begin{vmatrix} x+3 & 1 & -3 \\ 1 & x-1 & 2 \\ -2 & 3 & x-2 \end{vmatrix} \quad (11) \begin{vmatrix} 2x+3 & 1 & x+4 \\ -1 & 1 & -2 \\ x-2 & 2 & 2x-3 \end{vmatrix} \quad (12) \begin{vmatrix} x & -3 & y \\ -3 & 2 & 3 \\ y & 3 & x \end{vmatrix}$$

問題 5.3. 次の行列式を求めなさい.

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -8 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} 8 & 7 & 6 & 3 \\ 0 & -5 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

応用問題

平面のベクトル $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ の成分を並べた行列を A とする. OP , OQ を 2 辺とするような平行四辺形の面積は $|\det(A)|$, $\triangle OPQ$ の面積は $\frac{1}{2}|\det(A)|$. OP , OQ , OR を 3 辺とするような直方体のような立体 (すべての面が平行四辺形になる六面体) を平行六面体という. $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ の成分を並べた行列を A とするとき, 平行六面体の体積は $|\det(A)|$, 三角錐 $O-PQR$ の体積は $\frac{1}{6}|\det(A)|$.

問題 5.4. 次の 3 点を頂点とする三角形の面積を求めなさい.

$$(1) A(2, 3), B(7, 1), C(-1, -3). \quad (2) A(5, 1), B(7, 6), C(1, 2). \quad (3) A(1, 8), B(-3, 2), C(7, -3).$$

問題 5.5. 次の 4 点を頂点とする三角錐の体積を求めなさい.

$$(1) A(1, 3, 4), B(4, 2, 3), C(4, 2, 6), D(3, 5, 3). \quad (2) A(3, 2, 5), B(1, 4, 3), C(5, 3, -2), D(2, 7, 2).$$

空間内の 3 点 A, B, C を通る平面上の点を P とすると, $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ となるので, 3 つのベクトル $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の成分を並べた行列式は 0 になる.

問題 5.6. 次の 3 点を通る平面の方程式を求めなさい.

$$(1) A(0, 1, 2), B(2, 3, 1), C(1, 5, 5). \quad (2) A(3, -2, 5), B(4, 1, 2), C(0, 2, -1). \\ (3) A(1, 3, 4), B(4, 1, 3), C(2, 1, 2). \quad (4) A(0, 1, 2), B(2, 3, 1), C(1, 4, 4).$$