7　行列式の展開とクラーメルの公式

問題 7.1. 次の行列式を余因子展開を用いて計算しなさい.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & -2 & -1 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 5 & 7 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$　(7) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$　(8) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \end{vmatrix}$

(9) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$　(10) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & x \end{vmatrix}$　(11) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 1 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$　(12) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 0 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & y & 1 \\ 0 & 2 & 1 & y \end{vmatrix}$

問題 7.2. 次の行列が正則であることを確認し, 余因子行列を作ることにより逆行列を求めなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 7 & 2 & -1 \\ 9 & -4 & 5 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$　(10) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$　(11) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$　(12) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

問題 7.3. 次の連立 1 次方程式は解がただ 1 つだけあることを確認し, その解をクラーメルの公式を用いて求めなさい.

(1) $\begin{cases} 3x+2y+6z=6 \\ 6x+2y+7z=3 \\ 2x+3y+4z=4 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 4x-2y+3z=3 \\ 2x+3y-4z=-5 \\ 3x+2y-3z=-2 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x-3y+2z=-5 \\ 3x+2y-z=4 \\ 2x-3y+z=2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ 2x-3y+z=4 \\ 4x-2y-z=1 \end{cases}$　(5) $\begin{cases} 3x-3y+2z=4 \\ 2x+2y-3z=-3 \\ 4x-2y+z=5 \end{cases}$　(6) $\begin{cases} 3y-4z=5 \\ 5x-2y+3z=-4 \\ 3x+y-3z=-2 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 3x+2y-3z=-3 \\ 3y-2z=-5 \end{cases}$　(8) $\begin{cases} 4x-5y+2z=-7 \\ 3x-2y+z=8 \\ 2x+3y+2z=-3 \end{cases}$　(9) $\begin{cases} 7x-2y+3z=8 \\ 4x-5y+3z=5 \\ 3x+4y-z=-2 \end{cases}$

(10) $\begin{cases} 3x+4y+z=-19 \\ 8x+2y+7z=23 \\ 5x+y+3z=-1 \end{cases}$　(11) $\begin{cases} 3x+y+2z=3 \\ 7x+3y+5z=10 \\ 4x+2y+z=5 \end{cases}$　(12) $\begin{cases} 2y+3z=1 \\ 3x+2z=5 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$

応用問題

問題 7.4. 次の行列式を余因子展開を用いて計算しなさい.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & 2 & 3 \\ a & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & a \\ 3 & 2 & a & 1 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & x & 2 & 1 \\ x & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & y \\ 1 & 2 & y & 3 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 & -1 \\ x & 1 & x & 2 \\ 2 & x & 1 & x \\ -1 & 2 & x & 1 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & x & 1 & 3 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ 3 & 2 & 2 & x+1 \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

問題 7.5. 次の行列の逆行列を余因子行列を作ることにより求めなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

問題 7.6. 次の連立 1 次方程式をクラーメルの公式を用いて解きなさい.

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} -2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 6x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 2a + 3 \\ 3x + 4y + 2z = 3a - 2 \\ 2x + 4y + 3z = a - 4 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = -a + 3 \\ 2x + 3y + 4z = a + 2 \\ 3x + 2y - z = 3a - 1 \end{cases}$