

8 1 次独立と 1 次従属

問題 8.1. 次のベクトルの組は 1 次独立か 1 次従属か調べなさい.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. & (2) \quad & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. & (3) \quad & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}. \\
 (4) \quad & \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}. & (5) \quad & \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}. & (6) \quad & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

問題 8.2. 次のベクトルの組は 1 次独立か 1 次従属か調べなさい.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. & (2) \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. & (3) \quad & \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}. \\
 (4) \quad & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}. & (5) \quad & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. & (6) \quad & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

問題 8.3. 次のベクトルの組が 1 次従属になるような a の値を求めなさい.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. & (2) \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}. & (3) \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

問題 8.4. 次のベクトルの組は $\mathbf{b}$ を除けば 1 次独立だが $\mathbf{b}$ を含めれば 1 次従属になることを示し, $\mathbf{b}$ を残りのベクトルの 1 次結合で表せ.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}. & (2) \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -20 \\ 16 \end{pmatrix}. & (3) \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \\
 (4) \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 22 \\ 11 \end{pmatrix}. & (5) \quad & \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}. & (6) \quad & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

応用問題

問題 8.5. 次のベクトルの組に含まれる 1 次独立なものの最大個数を答えなさい.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. & (2) \quad & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. & (3) \quad & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}. \\
 (4) \quad & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. & (5) \quad & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}. & (6) \quad & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$