

10 内積と正規直交基底・直交行列

問題 10.1. 次の 2 つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ とがなす角を求めなさい.

$$(1) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

問題 10.2. 次のベクトルの組から正規直交基底を求めなさい.

$$\begin{aligned} (1) & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. & (2) & \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}. & (3) & \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}. \\ (4) & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. & (5) & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. & (6) & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \\ (7) & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. & (8) & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. & (9) & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

応用問題

問題 10.3. $\|t\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2$ を考えて Cauchy-Schwarz の不等式 $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq \| \mathbf{a} \| \| \mathbf{b} \|$ を示せ.

問題 10.4. 2 次正方行列 A が直交行列であるとする: ${}^tAA = E = A{}^tA$. このとき次の 2 つ以外ないことを示せ: $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$. ちなみに $R(\theta)$ は原点まわりに θ 回転した点を表すのに用いる行列であり, $T(\theta)$ は原点を通り x 軸とのなす角が θ となる直線と対称な点を表すのに用いる行列である.

問題 10.5. $\mathbf{a}$ とのなす角が θ となるような長さ 1 のベクトル $\mathbf{b}$ を求めなさい.

$$(1) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \theta = \frac{\pi}{3}. \quad (2) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \theta = \frac{3\pi}{4}. \quad (3) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \theta = \frac{2\pi}{3}. \quad (4) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \theta = \frac{5\pi}{6}.$$

問題 10.6. $\mathbf{a}_1$ とのなす角が θ_1 , $\mathbf{a}_2$ とのなす角が θ_2 となるような長さ 1 のベクトル $\mathbf{b}$ を求めなさい.

$$(1) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \theta_1 = \frac{\pi}{3}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \theta_2 = \frac{\pi}{2}. \quad (2) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \theta_1 = \frac{\pi}{4}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \theta_2 = \frac{2\pi}{3}.$$

問題 10.7. 次のベクトルの組から正規直交基底を求めなさい.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

問題 10.8. 座標変換を $T(\mathbf{x}) = P\mathbf{x} + \mathbf{b}$ (P は n 次の直交行列, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$) と定義する.

- (1) 内積が $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t\mathbf{x}\mathbf{y}$ になっていることに注意して $(P\mathbf{x}, P\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ であることを示せ.
- (2) この座標変換で 2 点間の距離が変わらないこと ($\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$) を示せ.
- (3) A, B, C の位置ベクトルの成分表示を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ とし, 座標変換後の点と位置ベクトルをそれぞれ $A'(T(\mathbf{a})), B'(T(\mathbf{b})), C'(T(\mathbf{c}))$ とする. このとき $\angle ABC = \angle A'B'C'$ を示せ.