

11 固有値と固有ベクトル

固有値: $\det(xE - A) = 0$ を解く. 符号に注意せよ.

固有空間: $xE - A$ を行基本変形し, 連立 1 次方程式を解く.

問題 11.1. 次の行列に対し, 固有値を求め, 各固有値に対する固有空間を求めなさい.

$$\begin{array}{llll} (1) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} & (4) \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ (5) \begin{pmatrix} 8 & -15 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & (6) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} & (7) \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & (8) \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ -2 & -9 \end{pmatrix} \end{array}$$

問題 11.2. 次の行列に対し, 固有値を求め, 各固有値に対する固有空間を求めなさい.

$$\begin{array}{llll} (1) \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} -2 & 5 & -7 \\ -1 & 6 & -9 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} 5 & 6 & -12 \\ -2 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} & (4) \begin{pmatrix} -4 & -5 & 13 \\ -6 & -4 & 12 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix} \\ (5) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} & (6) \begin{pmatrix} 7 & -9 & 18 \\ 4 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & (7) \begin{pmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 4 & 10 & 10 \\ -2 & -7 & -9 \end{pmatrix} & (8) \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 7 & 5 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

応用問題

問題 11.3. 次を満たす正方行列 A の固有値の候補を求めなさい.

$$(1) A^3 = O \quad (2) A^2 - 3A = O \quad (3) A^2 - 5A = 6E \quad (4) A^3 = 9A \quad (5) A^3 - 3A - 2E = O$$

問題 11.4. x の多項式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ に正方行列 A を代入したものを $f(A)$ と表す: $f(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$. もし, α が A の固有値であれば $f(\alpha)$ は $f(A)$ の固有値であることを示せ (Frobenius の定理).