

12 行列の対角化

対角化に必要な正則行列 P は, 固有ベクトル (各固有値に対する固有空間の基底になっているベクトル) を並べればよい. なお, $P^{-1}AP$ が対角行列になることを検算して確かめること. P^{-1} は余因子行列を作った方法が楽に計算できる (手計算の場合). 配置に気を付けるように.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

問題 12.1. 次の行列を対角化せよ.

$$\begin{array}{llll} (1) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} & (4) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ (5) \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} & (6) \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} & (7) \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & (8) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

問題 12.2. 次の行列を対角化せよ.

$$\begin{array}{llll} (1) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & -18 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} 9 & 8 & -14 \\ 7 & 4 & -8 \\ 9 & 7 & -13 \end{pmatrix} & (4) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -6 & -3 & 6 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \\ (5) \begin{pmatrix} 4 & 8 & -15 \\ -3 & -3 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & (6) \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & -2 \\ -5 & 9 & 5 \end{pmatrix} & (7) \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix} & (8) \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

応用問題

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ なので $A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1}$ により行列の n 乗が計算できる. 更に $\exp x = e^x$ のマクローリン展開の式に正方行列 A を代入すれば

$$e^A = \exp(A) = E + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$$

が計算できる. $(\exp(xA))' = A \exp(xA) = \exp(xA)A$ である. 特に $\exp\left(x \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{ax} & 0 \\ 0 & e^{bx} \end{pmatrix}$. $\exp(xA) = P \exp(x P^{-1}AP) P^{-1}$ により $\exp(xA)$ が計算できる.

問題 12.3. 次の行列 A に対し, A^n を求めなさい.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 12.4. 次の行列 A に対し, $\exp(xA)$ を求めなさい.

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} -6 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & -3 \\ -7 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$