

13 対称行列の対角化

対称行列は直交行列で対角化ができる! —

直交行列の逆行列は転置行列! 図形的には直交行列は回転や対称移動を表し、重要である。

- 固有値に対する固有ベクトルが 1 種類のみ $\Rightarrow$ 長さを 1 にすればいい
- 固有値に対する固有ベクトルが 2 種類以上 $\Rightarrow$ 正規直交基底を構成せよ。

問題 13.1. 次の対称行列を直交行列により対角化せよ。

$$\begin{array}{llll} (1) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} & (4) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\ (5) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} & (6) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} & (7) \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} & (8) \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

問題 13.2. 次の対称行列を直交行列により対角化せよ。

$$\begin{array}{llll} (1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} & (4) \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ (5) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (6) \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} & (7) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & (8) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

応用問題

問題 13.3. 2 次対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ の場合は対角化する直交行列として特に回転行列 $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ を用いることができる。もし対角化ができた場合、すなわち $R(-\theta)AR(\theta)$ が対角行列になるとき $\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$ となることを示せ。

問題 13.4. 次の 2 次対称行列を回転行列により対角化せよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

問題 13.5. 次の対称行列を直交行列により対角化せよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$