

数学1及演習(演習) 期末試験 担当：鈴木 敏行
1月23日(月) 1限 (9:00～10:10) 試験時間：70分

丁寧な字で解答することを心がけよ。解答に至る途中経過も書くこと(部分点をつける)。
 答案用紙の記入は問題番号順になるようにせよ。

配点：原則各10点。ただし⑧は20点。計100点満点。

- ① 次の階数を基本変形を用いることで求めなさい。ただしこの問題に限って基本変形の途中経過や詳細 $\left[\xrightarrow{1 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \times (-2)} \text{ など} \right]$ を明記すること(②以降は一部省略してかまわない)。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- ② 次の連立方程式を基本変形を用いて解きなさい。
- $$\begin{cases} x + 3y + z = -7 \\ 3x - 2y - 8z = 12 \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases}$$

- ③ 次の逆行列を求めなさい(方法は問わない)。
- $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- ④ 次の行列式を計算しなさい。
- $$(1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 6 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

- ⑤ 次の連立方程式をクラメルの公式を用いて解きなさい。ただし求めるのは x だけでよい。

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 4 \\ 2x + 2y - 3z = -3 \\ 4x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

- ⑥ ベクトルの組 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ は1次独立か1次従属か調べなさい。

- ⑦ $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ からシュミットの正規直交化法を用いて正規直交基底を求めなさい。

- ⑧ $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -6 & -3 & 6 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ を対角化せよ($P^{-1}CP$ がスカラー行列となる P を求めよ)。なお、正則

行列 P およびその逆行列 P^{-1} を求め $P^{-1}CP$ がスカラー行列となることを確かめる作業まですること。

ヒント：固有値の1つは -1 。

問題は以上。

①

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ \underline{1} & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{1 \text{ 行} \leftrightarrow 2 \text{ 行}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \text{ 行} + 1 \text{ 行} \times (-1)} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & 5 \\ 0 & \underline{2} & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{2 \text{ 行} \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \times (-4)} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{3 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \times 2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \text{rank} = 2.
 \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & -7 \\ 3 & -2 & -8 & 12 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow[3 \text{ 行} + 1 \text{ 行} \times (-2)]{2 \text{ 行} + 1 \text{ 行} \times (-3)} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & -7 \\ 0 & \underline{-11} & -11 & 33 \\ 0 & -5 & -5 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行} \times (-\frac{1}{11})} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & 15 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow[3 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \times 5]{1 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \times (-3)} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$z = c$ とおくと $x - 2c = 2$, $y + c = -3$. したがって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2c \\ -3 - c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

③ 基本変形を用いる方法:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow[3 \text{ 行} + 1 \text{ 行} \times (-2)]{1 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \times (-3)} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{-7} & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{2 \text{ 行} \times (-\frac{1}{7})} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & -6 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \times 6]{1 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \times (-2)} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{9}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & -\frac{6}{7} & 1 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{3 \text{ 行} \times 7} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{9}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[2 \text{ 行} + 3 \text{ 行} \times (-\frac{6}{7})]{1 \text{ 行} + 3 \text{ 行} \times (-\frac{9}{7})} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -5 & 8 & -9 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

したがって逆行列は $B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 8 & -9 \\ -3 & 5 & -6 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$.

余因子行列による方法: まず, $|B| = (-18) + (-1) + 12 - 6 - (-6) - (-6) = -1$. また, 余因子行列は

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5, & \tilde{b}_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -8, & \tilde{b}_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9, \\ \tilde{b}_{12} &= -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3, & \tilde{b}_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, & \tilde{b}_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6, \\ \tilde{b}_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4, & \tilde{b}_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6, & \tilde{b}_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7.\end{aligned}$$

したがって

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 9 \\ 3 & -5 & 6 \\ -4 & 6 & -7 \end{pmatrix}. \quad \therefore B^{-1} = \frac{1}{|B|} \tilde{B} = \begin{pmatrix} -5 & 8 & -9 \\ -3 & 5 & -6 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

④ (1) $(-2)2(-2) + 3(-3)3 + 1(-1)1 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - (-2)(-3)1 - 3(-1)(-2) = 8 - 27 - 1 - 6 - 6 - 6 = -38$. (2) 1 列による展開をすれば

$$\begin{aligned}& 2 \begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\&= 2(0 + 42 + 3 - 6 - 45 - 0) - 3(0 + 30 + 9 - 18 - 54 - 0) + 0 - (126 + 5 + 45 - 21 - 18 - 75) \\&= 2(-6) - 3(-33) - 62 = -12 + 99 - 62 = 25.\end{aligned}$$

⑤ 係数行列と x の列 (1 列目) を変えた行列はそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_x = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

その行列式は

$$\begin{aligned}|A| &= (-8) + 6 + 36 - (-6) - 16 - 18 = 48 - 42 = 6, \\ |A_x| &= 12 + 8 + 45 - 9 - 20 - 24 = 65 - 53 = 12.\end{aligned}$$

したがって $x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{12}{6} = 2$.

ちなみに $x = 2, y = 4, z = 5$.

⑥

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{3 \text{ 行}+1 \text{ 行} \times 2 \\ 4 \text{ 行}+1 \text{ 行} \times (-1)}]{\substack{2 \text{ 行}+1 \text{ 行} \times (-1)}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\times(-\frac{1}{3})]{2 \text{ 行}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{3 \text{ 行}+2 \text{ 行} \times (-3)}]{1 \text{ 行}+2 \text{ 行} \times (-1)} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rank } A = 2 < 3 = \text{ベクトルの個数}$ なので 1 次従属. もちろん $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3$ なので 1 次従属といってもよい.

$$\boxed{7} \quad \|\mathbf{a}_1\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \text{ より } \mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ 次に}$$

$$(\mathbf{a}_2, \mathbf{n}_1) = \frac{2+1+0}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}. \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \sqrt{3}\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\|\mathbf{b}_2\| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2} \text{ より } \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ 更に}$$

$$(\mathbf{a}_3, \mathbf{n}_1) = \frac{0+1+1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad (\mathbf{a}_3, \mathbf{n}_2) = \frac{0+0+(-1)}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{n}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\|\mathbf{b}_3\| = \frac{\sqrt{1+4+1}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ より } \mathbf{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{以上から求める正規直交基底は } \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\boxed{8}$ 固有多項式は

$$\begin{aligned} |xE - C| &= \begin{vmatrix} x-1 & 2 & -2 \\ 6 & x+3 & -6 \\ 4 & 4 & x-7 \end{vmatrix} \\ &= -48 + (x-1)(x+3)(x-7) - 48 - 12(x-7) + 8(x+3) + 24(x-1) \\ &= -96 + x^3 - 5x^2 - 17x + 21 + 20x + 84 \\ &= x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x+1)(x^2 - 6x + 9) = (x+1)(x-3)^2. \end{aligned}$$

したがって固有値は $-1, 3$.

-1 に対する固有空間は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 6 & 2 & -6 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix} &\xrightarrow[1 \text{ 行} \times (-\frac{1}{2})]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -6 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[3 \text{ 行} + 1 \text{ 行} \times (-4)]{2 \text{ 行} + 1 \text{ 行} \times (-6)} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & 8 & -12 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[2 \text{ 行} \times \frac{1}{8}]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 8 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[3 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \times (-8)]{1 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \times 1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって $z = t$ とおくと $x - \frac{1}{2}t = 0, y - \frac{3}{2}t = 0$ なので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \therefore W_{-1}(C) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

3 に対する固有空間は

$$\begin{pmatrix} \underline{2} & 2 & -2 \\ 6 & 6 & -6 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 行} \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 6 & 6 & -6 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[3 \text{ 行} + 1 \text{ 行} \times (-4)]{2 \text{ 行} + 1 \text{ 行} \times (-6)} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって $y = s, z = t$ とおくと $x + s - t = 0$ なので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s + t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \therefore W_3(C) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

対角化をするための正則行列は $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 逆行列を求める.

$$|P| = 0 + 1 + 0 - (-3) - 2 - 0 = 2$$

および

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & \tilde{p}_{21} &= -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & \tilde{p}_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \\ \tilde{p}_{12} &= -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, & \tilde{p}_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, & \tilde{p}_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3, \\ \tilde{p}_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, & \tilde{p}_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, & \tilde{p}_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4. \end{aligned}$$

ゆえに $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. または基本変形により求められる:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3 \text{ 行} + 1 \text{ 行} \times (-2)]{2 \text{ 行} + 1 \text{ 行} \times (-3)} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{4} & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{2 \text{ 行} \times \frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[3 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \times (-2)]{1 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \times 1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{3 \text{ 行} \times 2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[2 \text{ 行} + 3 \text{ 行} \times \frac{3}{4}]{1 \text{ 行} + 3 \text{ 行} \times (-\frac{1}{4})} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned} P^{-1}CP &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -6 & -3 & 6 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix} P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -9 & -3 & 9 \\ -6 & -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$