

1 行列の演算

問題 1.1. (1)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \\ 14 & 16 & 18 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 27 \\ 22 & 26 & 30 & 34 \end{pmatrix}.$$
 (2) (5, 2) 成分.

問題 1.2. (1)
$$\begin{pmatrix} 16 & -27 \\ 4 & -1 \\ -7 & 17 \end{pmatrix}.$$
 (2)
$$\begin{pmatrix} -2 & -19 & 19 \\ 6 & 20 & -13 \end{pmatrix}.$$
 (3)
$$\begin{pmatrix} 13 & -2 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}.$$
 (4)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$
 (5)
$$\begin{pmatrix} -6 & 22 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$
 (6)
$$\begin{pmatrix} 22 & 0 & -5 \\ 10 & 7 & -1 \\ -6 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

問題 1.3.

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$
 (2)
$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 4 & -2 & 8 \\ 7 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$
 (3)
$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & -10 \\ 10 & -10 & 20 \end{pmatrix}$$
 (4)
$$\begin{pmatrix} 11 & 13 \\ -18 & 26 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$$
 (5)
$$\begin{pmatrix} 11 & 13 \\ -18 & 26 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 1.4.

$$\begin{pmatrix} -2x-1 & -2y-1 \\ x+5 & y-4 \\ 2x-5 & 2y+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 8 & -2 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} \quad \therefore x=3, y=2.$$

問題 1.5.
$$X = \begin{pmatrix} -23 & -159 \\ 161 & 124 \\ -74 & -137 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 17 & 101 \\ -99 & -76 \\ 46 & 83 \end{pmatrix}.$$
 ($X = 25A - 12B, Y = -15A + 8B$ に注意).

問題 1.6. (1)
$$\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$
 (2) $A^{2m-1} = A, A^{2m} = E$ (m は正の整数). (3)
$$\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

問題 1.7. (1) 略. 素直に計算せよ.

(2) Cayley-Hamilton の定理より $A^2 - 2A + E = O$. 一方, $x^3 - 3x^2 = (x-1)(x^2 - 2x + 1) - 3x + 1$ なので, $B = (A - E)(A^2 - 2A + E) - 3A + E = -3A + E = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}.$

(3) Cayley-Hamilton の定理より $A^2 - (a+d)A + (ad-1)E = O$. $A^2 - 6A + 7E = O$ であるから, $-(a+d)A + (ad-1)E = -6A + 7E$. $(a+d-6)A = (ad-8)E$ だが, (2, 1) 成分を比較すると $a+d-6=0$. これより $ad-8=0$. a, d は $t^2 - 6t + 8 = 0$ の解なので, $(a, d) = (2, 4), (4, 2)$.