

10 内積と正規直交基底

問題 10.1. (1) $\theta = \frac{5}{6}\pi$. (2) $\theta = \frac{5}{6}\pi$. (3) $\theta = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$.

問題 10.2.

$$\begin{aligned} (1) & \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. & (2) & \left\{ \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}. & (3) & \left\{ \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}. \\ (4) & \left\{ \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}. & (5) & \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. & (6) & \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{15\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 16 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} \right\}. \\ (7) & \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. & (8) & \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \\ (9) & \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

問題 10.3. $\|t\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 t^2 + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})t + \|\mathbf{b}\|^2 \geq 0$ だから判別式が 0 以下. これを利用して示せる.

問題 10.4. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおけば ${}^tAA = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$, $A{}^tA = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$. これらが単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なので $a = \cos \alpha$ とおけば $b = \pm \sin \alpha$, $c = \pm \sin \alpha$, $d = \pm \cos \alpha$ となる. $ab + cd = 0$ および $ac + bd = 0$ になるように符号を調整すれば $b = \mp \sin \alpha$, $c = \pm \sin \alpha$, $d = +\cos \alpha$ または $b = \pm \sin \alpha$, $c = \pm \sin \alpha$, $d = -\cos \alpha$ となる (複号同順).

問題 10.5. $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく. 内積を成分の方で計算するのと $\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$ で計算するのと 2 通りを考える. $\mathbf{b}$ の長さが 1 なので $x^2 + y^2 = 1$. 2 つの方程式を連立させて解けばよい. 解答は複号同順.

$$(1) \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 \pm 4\sqrt{3} \\ 4 \mp 3\sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (2) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3) \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} \pm \sqrt{15} \\ -\sqrt{5} \pm 2\sqrt{15} \end{pmatrix}. \quad (4) \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -\sqrt{30} \pm \sqrt{10} \\ \sqrt{30} \pm 3\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

問題 10.6. 前問を成分を 3 個にしたものであり, 解き方は同じ. 解答は複号同順.

$$(1) \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \mp 2\sqrt{38} \\ 8\sqrt{3} \mp \sqrt{38} \\ 4\sqrt{3} \pm 3\sqrt{38} \end{pmatrix} \quad (2) \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{6} \\ -6 - 2\sqrt{3} \pm \sqrt{6} \\ 6 - 2\sqrt{3} \pm \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

問題 10.7.

$$\begin{aligned} (1) & \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}. & (2) & \left\{ \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{51}} \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{102}} \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}. \\ (3) & \left\{ \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1790}} \begin{pmatrix} 31 \\ 18 \\ 21 \\ -8 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{179}} \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ -17 \\ 15 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

問題 10.8. (1) $(P\mathbf{x}, P\mathbf{y}) = {}^t(P\mathbf{x})P\mathbf{y} = {}^t\mathbf{x}{}^tPP\mathbf{y} = {}^t\mathbf{x}\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

(2) $\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| = \|P\mathbf{x} - P\mathbf{y}\| = \|P(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|$. あとは (1) を利用.

(3) $\overrightarrow{BA}$ と $\overrightarrow{BC}$ とのなす角と $\overrightarrow{B'A'}$ と $\overrightarrow{B'C'}$ とのなす角とが同じであることを示せばよい.