

12 行列の対角化

問題 12.1. 対角化に必要な P や出来上がる対角行列は異なるものもあり得る.

$$(1) P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(2) P = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(3) P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(4) P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(5) P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(6) P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$(7) P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(8) P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

問題 12.2. 対角化に必要な P や出来上がる対角行列は異なるものもあり得る.

$$(1) P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(2) P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$(3) P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(4) P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -7 & -5 & 11 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(5) P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -3 & -4 & 9 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(6) P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(7) P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(8) P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 8 & -5 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

問題 12.3.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 - 3^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$(2) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 5^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 5^n \\ -2^n + 5^n & 2^n + 2 \cdot 5^n \end{pmatrix}$$

$$(3) \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5(-3)^n - 1 & -5(-3)^n + 5 \\ (-3)^n - 1 & -(-3)^n + 5 \end{pmatrix}$$

$$(4) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n & -(-1)^n + 3^n & 2(-1)^n - 2 \cdot 3^n \\ (-1)^n - 3^n & -(-1)^n + 3^{n+1} & 2(-1)^n - 2 \cdot 3^n \\ (-1)^n - 3^n & -(-1)^n + 3^n & 2(-1)^n \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} -2 + 2^n + 2(-2)^n & -1 + 2^n & 5 - 3 \cdot 2^n + (-2)^{n+1} \\ -4 + (-2)^n + 3 \cdot 2^n & -2 + 3 \cdot 2^n & 10 - (-2)^n - 9 \cdot 2^n \\ -2 + (-2)^n + 2^n & -1 + 2^n & 5 - (-2)^n - 3 \cdot 2^n \end{pmatrix}$$

問題 12.4.

$$(1) \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{6x} + 2 & 4e^{6x} - 4 \\ e^{6x} - 1 & 2e^{6x} + 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) \frac{1}{6} \begin{pmatrix} e^{4x} + 5e^{-2x} & -5e^{4x} + 5e^{-2x} \\ -e^{4x} + e^{-2x} & 5e^{4x} + e^{-2x} \end{pmatrix}$$

$$(3) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{4x} + e^x & 2e^{4x} - 2e^x \\ e^{4x} - e^x & e^{4x} + 2e^x \end{pmatrix}$$

$$(4) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4e^{3x} + e^{-2x} & 3e^{3x} - 3e^{-2x} & -2e^{3x} + 2e^{-2x} \\ 2e^{3x} - 2e^{-2x} & -e^{3x} + 6e^{-2x} & 4e^{3x} - 4e^{-2x} \\ e^{3x} - e^{-2x} & -3e^{3x} + 3e^{-2x} & 7e^{3x} - 2e^{-2x} \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} -2e^{3x} + 2e^x + e^{-2x} & e^{3x} - e^{-2x} & 3e^{3x} - 2e^x - e^{-2x} \\ e^x - e^{-2x} & e^{-2x} & -e^x + e^{-2x} \\ -2e^{3x} + e^x + e^{-2x} & e^{3x} - e^{-2x} & 3e^{3x} - e^x - e^{-2x} \end{pmatrix}$$