

1 多変数関数入門

問題 1.1. 次を求める式を適当な文字を用いて表し、変数の種類と個数を答えなさい.

- | | | | |
|-------------|---------------|--------------|--------------|
| (1) 長方形の面積 | (2) 円の面積 | (3) 正方形の周の長さ | (4) 長方形の周の長さ |
| (5) 円周の長さ | (6) 立方体の体積 | (7) 立方体の表面積 | (8) 直方体の体積 |
| (9) 直方体の表面積 | (10) 直方体の辺の合計 | (11) 円柱の体積 | (12) 円柱の表面積 |
| (13) 球の体積 | (14) 球の表面積 | (15) 円錐の体積 | (16) 円錐の表面積 |

ノルムと内積. $x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_N), y = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ に対し

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1), \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq N} |x_k|, \quad (x, y) := \sum_{k=1}^N x_k y_k.$$

最初の 2 つはノルム (p ノルムなどと呼ぶ) であり, 最後のは内積である.

問題 1.2. 次の事実を証明しなさい.

- (1) $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$ (2) $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$
 (3) $p > 1$ のとき, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1$ (4) $\|x\|_1 \leq N \|x\|_\infty$
 (5) $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$
 (5) のヒント. $|x_1| \leq \dots \leq |x_N|$ と仮定するとわかりやすい. また, はさみうちの原理を利用.

問題 1.3. 次の事実を証明しなさい.

- (1) $|(x, y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$ [Cauchy-Schwarz の不等式](ちなみに証明方法は複数ある)
 (2) $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$

問題 1.4. $\mathbb{R}^2$ に対して, 次の不等式が表す図形を図示しなさい.

- (1) $\|x\|_2 \leq 1$ (2) $\|x\|_1 \leq 1$ (3) $\|x\|_\infty \leq 1$
 (4) $1 < \|x\|_2 < 2$ (5) $\|x\|_1 > 2$ (6) $2 \leq \|x\|_\infty < 3$

応用問題

凸関数. 関数 $f(x)$ が区間 I で凸であるとは, 以下を満たすことである:

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1]; \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

$f(x)$ が I で 2 階微分可能で, $f''(x) > 0$ のとき, $f(x)$ は I で凸になる. また, $f(x)$ が I で凸であれば,

$$x_k \in I, t_k \in [0, 1], \sum_{k=1}^n t_k = 1 \Rightarrow f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k).$$

問題 1.5. $f(x) := -\log x$ が $(0, \infty)$ で凸であることを利用して, 次の事実を示しなさい.

- (1) $x_1, x_2, \dots, x_n$ が正の数のとき, $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ [相加・相乗平均].
 (2) p, q は正の数で $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする. このとき, 正の数 a, b に対して $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$ [Young の不等式].

問題 1.6. 次の手順でノルム $\|x\|_p (p > 1)$ が Minkowski の不等式 $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ を満たすことを証明しよう.

- (1) Hölder の不等式 $|(x, y)| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ (q は正の数で $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす) を示せ.

ヒント. 各成分は非負であると考えてもよい (理由は考えよ). 前問の Young の不等式を $a = tx_k$, $b = t^{-1}y_k$ として使い, t の関数として最小値を考える.

- (2) Minkowski の不等式を示せ.

ヒント. Hölder の不等式は $\sum_{k=1}^N |x_k| |x_k + y_k|^{p-1}$ に対して用いる.