

2 $\mathbb{R}^N$ の位相

準備. 次の定義を何も見ずに述べられるか?

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (数列の極限值) (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ (1 変数関数の極限值)
 (3) $A \subset \mathbb{R}^N$ の内部 (A° や $\text{Int}A$) の定義 (4) $A \subset \mathbb{R}^N$ の閉包 ($\bar{A}$) の定義
 (5) $A \subset \mathbb{R}^N$ が開集合であることの定義 (6) $A \subset \mathbb{R}^N$ が閉集合であることの定義

問題 2.1. 以下を示しなさい.

- (1)[!] $\emptyset$ は開集合でも閉集合でもある. (2)[!] $\mathbb{R}^N$ は開集合でも閉集合でもある.
 (3) $A \subset \mathbb{R}^N$ が開集合のとき, $A^c = \mathbb{R}^N \setminus A$ は閉集合. (4)[!] ∂A は閉集合.

問題 2.2. $D := \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1, x_2 \in \mathbb{Q}, 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ と定める.

- (0) 有理数の稠密性とは何か説明せよ (論理記号を用いて述べよ).
 (1) $D^\circ = \emptyset$ を証明しなさい.
 (2) $\bar{D} = [0, 1] \times [0, 1] := \{x \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ を示しなさい.
 (3) D の境界 ∂D と, さらにその境界 $\partial(\partial D)$ を求めなさい.

問題 2.3. $\mathbb{R}^N$ の点列 $\{x_n\}_n$ に対し, 次を示しなさい. ただし, $(\cdot, \cdot)$ は内積とする.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ならば, すべての $y \in \mathbb{R}^N$ に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) = (a, y)$ となる.
 (2) 逆に, すべての $y \in \mathbb{R}^N$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) = (a, y)$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

問題 2.4.[!] A は $M \times N$ 行列, $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R}^N$ は点列とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Aa$ となることを示せ.

問題 2.5. 次の関数は $(0, 0)$ で連続であるか調べよ.

$$\begin{aligned} (1) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases} & (2) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \\ (3) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases} & (4) f(x, y) &= \begin{cases} xy \log(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

応用問題

問題 2.6. $\mathbb{R}^N$ の 3 点を x, y, z とする. このとき, 点列 $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n, \{z_n\}_n$ をそれぞれ

$$x_1 = x, y_1 = y, z_1 = z, \quad x_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{2}, y_{n+1} = \frac{z_n + x_n}{2}, z_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

によって定める.

- (1) $\{x_n\}_n$ が Cauchy 列であることを示しなさい.
 (2) $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n, \{z_n\}_n$ はそれぞれ何に収束するか求めなさい.
 (3) この話題を一般化してみよ.