3 偏微分の計算

問題 3.1. 次の 2 変数関数に対して, 定義に従って $(0,0)$ での偏微分係数を求めなさい.

$$(1)\ f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases} \qquad (2)\ f(x,y) := \sqrt{|xy|}$$

問題 3.2. 次の関数に対して, 1 階偏導関数及び 2 階偏導関数を求めなさい.

$$(1)\ f(x,y) := x^3y^2 - xy^4 \qquad (2)\ f(x,y) := e^{3x+2y}\sin(2x-3y) \qquad (3)\ f(x,y) := e^{x^2y}$$

$$(4)\ f(x,y) := xy^2e^{\frac{x}{y}} \qquad (5)\ f(x,y) := \sqrt{3x^2+6xy-y^2} \qquad (6)\ f(x,y) := x^y$$

$$(7)\ f(x,y) := \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad (8)\ f(x,y) := \log(x^2-2xy+3y^2) \qquad (9)\ f(x,y) := \log_x y$$

$$(10)\ f(x,y) := \sin^{-1}\frac{y}{x} \qquad (11)\ f(x,y,z) := \log(x^2+2zy) \qquad (12)\ f(x,y,z) := e^{\frac{xy}{z}}$$

$$(13)\ f(x,y,z) := \sqrt{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2} \qquad (14)\ f(x,y,z) := xyze^{xyz}$$

★ 本来は f_{xy} と f_{yx} は異なるが, f_x, f_y, f_{xy} が存在して連続であれば, 計算せずとも $f_{yx} = f_{xy}$ となる (この仮定はもう少し弱められる).

問題 3.3.! $\Delta u(x,y) := u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y)$, $\Delta u(x,y,z) := u_{xx}(x,y,z) + u_{yy}(x,y,z) + u_{zz}(x,y,z)$ を u の **Laplacian**(ラプラシアン) という. $\Delta u = 0$ となるとき, u を**調和関数**という. 次の関数が調和関数であることを示せ.

$$(1)\ f(x,y) := x^4-6x^2y^2+y^4 \qquad (2)\ f(x,y) := \frac{2x-3y}{x^2+y^2} \qquad (3)\ f(x,y) := \log(x^2+y^2)$$

$$(4)\ f(x,y) := \cos x\cosh y \qquad (5)\ f(x,y,z) := \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

★ 調和関数は何回も偏微分可能であり, それらはすべて連続になる. ちなみに n 階偏導関数までがすべて連続のときに C^n 級という. 従って, 調和関数は C^n 級関数である (n は任意).

問題 3.4.! 次の関数が, [ ] 内に示す偏微分方程式を満たすことを示しなさい.

$$(1)\ u(t,x) := f(x-t)+f(x+t) \quad [u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0]\ \text{ただし, } f \in C^2(\mathbb{R}).$$

$$(2)\ u(t,x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad [u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0]$$

$$(3)\ u(x,y,z) := \frac{\sin(k\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad [\Delta u(x,y,z) + k^2u(x,y,z) = 0]$$

問題 3.5. a, b は実数とする. 次の関数に対し, 以下の問いに答えなさい.

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy(ax+by)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1) $(x,y) \neq (0,0)$ のときの 1 階偏導関数を求めなさい.
(2) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求め, f_x, f_y が $(0,0)$ で連続か調べなさい.

問題 3.6. a, b は実数とする. 次の関数に対し, 以下の問いに答えなさい.

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{ax^2+by^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1) $(x,y) \neq (0,0)$ のときの 1 階偏導関数および 2 階偏導関数を求めなさい.
(2) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求め, f_x, f_y が $(0,0)$ で連続か調べなさい.
(3) $f_{xy}(0,0)$ と $f_{yx}(0,0)$ を求めなさい.
(4) $f(x,y)$ が C^2 級である必要十分条件を答えよ.

ちなみに, $f : O(\subset \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ に対して, **勾配**は偏導関数を並べた<u>列</u>ベクトルとする: $\nabla f(x) := {}^t(f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \cdots, f_{x_N}(x))$. ∇(ナブラ) ではなく grad を用いることもある.

応用問題

$v \in \mathbb{R}^N$ を $\|v\| = 1$ とする. このとき, $f(x)$ の a における v に沿った**方向微分**は

$$\nabla_v f(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv)-f(a)}{h}.$$

v が基本ベクトルのときには偏微分に一致する. 以下の問から分かるように 1 変数関数の微分のような性質のいい微分 (微分可能ならば連続がいえるようなもの) は更に工夫が必要である.

問題 3.7. 問題 3.1 で与えた関数は $(0,0)$ の ${}^t(a,b)(ab \neq 0)$ に沿った方向微分が存在しないことを示しなさい.

問題 3.8. 次の関数に対し, 以下の問いに答えなさい.

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1) $(0,0)$ の ${}^t(a,b)$ に沿った方向微分を求めなさい.
(2) $f(x,y)$ は $(0,0)$ では連続でないことを示せ.