4　合成関数の微分法

問題 4.1. $f(x,y)$ は C^2 級とする. 次の関数 $z(t)$ の 1 階導関数および 2 階導関数を f の偏導関数などを用いて表しなさい.

$$(1)\ z(t) := f(\alpha t + a, \beta t + b) \qquad (2)\ z(t) := f(e^{at}, e^{bt}) \qquad (3)\ z(t) := \frac{1}{t^2} f\Big(\frac{a}{t}, \frac{b}{t}\Big)$$

問題 4.2. $f(x,y)$ は C^2 級とする. 次の関数 $g(u,v)$ の 1 階偏導関数および 2 階偏導関数を求めなさい.

$$(1)\ g(u,v) := f(u^2 - v^2, 2uv) \qquad (2)\ g(u,v) := f(\tanh u \cosh v, \tanh u \sinh v)$$

$$(3)\ g(u,v) := f\Big(\frac{v}{u+v}, \frac{u}{u+v}\Big)$$

問題 4.3.! $f(x,y,z)$ は C^2 級とする. $g(u,v,w) := f(u+v+w, uv+vw+wu, uvw)$ の 1 階偏導関数および 2 階偏導関数を求めなさい.

問題 4.4. $f(x,y)$ は C^2 級とする. $g(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ に対し以下を示しなさい.

$$(1)\ xf_x + yf_y = rg_r. \qquad (2)\ f_x^2 + f_y^2 = g_r^2 + \frac{1}{r^2}g_\theta^2. \qquad (3)\ f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}.$$

問題 4.5.! (前問の 3 変数化). $f(x,y,z)$ は C^2 級とする. $g(r,\theta,\varphi) := f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ に対し以下を示しなさい.

$$(1)\ xf_x + yf_y + zf_z = rg_r. \qquad (2)\ f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 = g_r^2 + \frac{1}{r^2}g_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}g_\varphi^2.$$

$$(3)\ f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = g_{rr} + \frac{2}{r}g_r + \frac{1}{r^2}\Delta_S g. \quad \text{ただし},\ \Delta_S g = g_{\theta\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}g_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}g_{\varphi\varphi}.$$

問題 4.6. $f(x,y)$ は C^2 級とする. また, $\varphi(x)$ は $f(x,\varphi(x)) = 0$ となる C^2 級関数とする.
(1) $\varphi(x)$ の 1 階導関数および 2 階導関数を f の偏導関数を用いて表しなさい.
(2) $b = \varphi(a)$ とする. 次を示せ:

$$\text{(2-a)}\ f_x(a,b) = 0,\ \frac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)} > 0 \ \Rightarrow\ \varphi \text{ は } x = a \text{ で極大},$$

$$\text{(2-b)}\ f_x(a,b) = 0,\ \frac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)} < 0 \ \Rightarrow\ \varphi \text{ は } x = a \text{ で極小}.$$

★ 実は, $f_y(a,b) \neq 0$ であれば $\varphi(x)$ の存在が ($x = a$ の近傍で) 保証される (陰関数定理).

問題 4.7. $u(x,y)$ は C^2 級で, $\mathbb{R}^2$ で調和とする: $\Delta u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$. このとき, $v(x,y) := u\Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\Big)$ は $(x,y) \neq (0,0)$ で調和であることを示しなさい.

応用問題

問題 4.8. (前問の一般化). $u(x,y)$, $v(x,y)$ は C^2 級であり, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ とする.
(1) $u(x,y)$, $v(x,y)$ は調和関数であることを示しなさい.
(2) $f(u,v)$ が C^2 級のとき, $g(x,y) := f(u(x,y), v(x,y))$ とおくと $g_{xx} + g_{yy} = (f_{uu} + f_{vv})(u_x^2 + u_y^2)$ を示しなさい.

問題 4.9. $f(tx) = t^\alpha f(x) (t > 0)$ となる関数を α 次同次関数という. α 次同次関数 $f(x)$ が $x \neq 0$ で C^1 級であれば, $x \cdot \nabla f(x) = \alpha f(x)$ となることを示しなさい.

問題 4.10. $f(x)$ は $O(\subset \mathbb{R}^N)$ で C^1 級とする. $a \in O$ の v に沿った方向微分が $\nabla_v f(a) = v \cdot \nabla f(a)$ となることを示せ.