

5 陰関数定理

陰関数定理. $f(x, y)$ は C^1 級とする. このとき, $f(a, b) = 0$, $f_y(a, b) \neq 0$ であれば以下を満たす a の近傍で定義される C^1 級関数 $\varphi(x)$ がただ 1 つある. $f(x, \varphi(x)) = 0$, $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$. なお, $f(x, y)$ が C^n 級であれば, $\varphi(x)$ は C^n 級である (問題 4.6 参照).

問題 5.1. 以下の各場合について $f(x, y) = 0$ となる点 P の近傍で陰関数 $y = g(x)$ および $x = h(y)$ が存在するか判定しなさい. 存在する場合にはその導関数 $g'(x)$, $h'(y)$ を x と y との式で表しなさい.

- (1) $f(x, y) := x^3 - 3xy - y^3 + 3$, $P(1, 1)$. (2) $f(x, y) := e^{xy} + x^2 + 4xy - y^2$, $P(0, 1)$.
 (3) $f(x, y) := x^2 \sin y + y \cos x - \pi$, $P(0, \pi)$. (4) $f(x, y) := x^2 - y + \sin(xy)$, $P(0, 0)$.

問題 5.2. 2 変数の陰関数定理より, 1 変数の逆関数の微分公式を導きなさい.

2 次曲線への補足. 2 次曲線 $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ に対して, 係数行列 A と拡大係数行列 $\hat{A}$ をそれぞれ

$$A := \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}, \quad \hat{A} := \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$$

とする. また, A の 2 つの固有値を λ_1, λ_2 とする.

- (a) 固有値に 0 がいない場合には次の曲線と合同である: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\det(\hat{A})}{\det(A)} = 0$;
 (b) 固有値に 0 が 1 個だけある場合には $\lambda_1 = \lambda \neq 0$ として次の曲線と合同である:

$$\bullet \det(\hat{A}) \neq 0 \Rightarrow \lambda x^2 - 2\sqrt{\frac{-\det(\hat{A})}{\lambda}}y = 0, \quad \bullet \det(\hat{A}) = 0 \Rightarrow \lambda x^2 + c - \frac{f^2 + g^2}{\lambda} = 0.$$

2 次曲線には楕円・双曲線・放物線があるが, 楕円のみ有界閉集合であることに注意せよ.

問題 5.3. 次の方程式が表す図形の名称を答えよ. また, 点 P における接線の方程式を求めなさい.

- (1) $x^2 - 4xy + 3y^2 - 3 = 0$, $P(2, 1)$. (2) $3x^2 + 4xy + 3y^2 - 18 = 0$, $P(1, -3)$.
 (3) $3x^2 - 4xy + 5y^2 - 23 = 0$, $P(3, 2)$. (4) $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 6x + 12y + 4 = 0$, $P(3, -2)$.
 (5) $6xy + 4x - 2y + 22 = 0$, $P(-2, 1)$. (6) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 12y - 37 = 0$, $P(-1, 2)$.

応用問題

問題 5.4. 問題 4.6 を活用して, 次の式で定められる陰関数 $y = y(x)$ の極値を求めなさい.

- (1) $3x^2 + 4xy + 3y^2 - 15 = 0$ (2) $x^2 - 4xy + 5y^2 - 6x + 4y = 0$