

6 極値問題

問題 6.1. 次の関数の極値を求めなさい.

$$(1) f(x, y) := x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 6y$$

$$(2) f(x, y) := x^3 + xy - x^2 - y^2$$

$$(3) f(x, y) := xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$$

$$(4) f(x, y) := x^2 - xy + y^2 + \frac{8(x+y)}{xy}$$

$$(5) f(x, y) := x^3 + 6xy + y^2$$

$$(6) f(x, y) := 3x^2 + 6xy - y^3$$

$$(7) f(x, y) := xy^2(12 - x - y)$$

$$(8) f(x, y) := x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

問題 6.2. 次の関数は $(0, 0)$ が停留点で Hessian が 0 になることを確認したうえで, 極大点・極小点・鞍点のどれであるか調べなさい.

$$(1) f(x, y) := x^3 + y^3$$

$$(2) f(x, y) := x^4 + y^4$$

$$(3) f(x, y) := -x^4 + x^2y^2 - y^4$$

$$(4) f(x, y) := 3x^4 - 3x^2y + y^2$$

$$(5) f(x, y) := 2x^2 - 3xy^2 + y^4$$

問題 6.3. 以下の問題を極値問題を考えて解きなさい.

(1) 周の長さが 12 の三角形で面積が最大になる三角形は何か. また, その時の面積を求めよ.

(2) 周の長さが 36 の直方体で体積が最大になる立体は何か. また, その時の体積を求めよ.

(3) 表面積が 24 の直方体で体積が最大になる立体は何か. また, その時の体積を求めよ.

問題 6.4.¹ $f(x)$ が O で連続であるとする. 以下を示しなさい.

(1) $A \subset O (\subset \mathbb{R}^N)$ は閉集合のとき, $f(A)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合.

(2) A が弧状連結, すなわち任意の $a, b \in A$ に対し $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$ となる A に値をとる連続関数 $\varphi(t)$ が存在するとき, $f(A)$ は $\mathbb{R}$ の区間. 注意. 区間は $\mathbb{R}$ における弧状連結なもの.

楕円は有界閉集合で, 弧状連結だから, 連続関数による像は閉区間である.

問題 6.5. 次の条件 $g(x, y) = 0$ の下での関数 $f(x, y)$ の最大値・最小値を求めなさい.

$$(1) f(x, y) := 4xy, \quad g(x, y) := x^2 + y^2 - 2 = 0.$$

$$(2) f(x, y) := 2x - y, \quad g(x, y) := x^2 + y^2 - 5 = 0.$$

$$(3) f(x, y) := x + y, \quad g(x, y) := x^2 - xy + y^2 - 3 = 0.$$

$$(4) f(x, y) := x + y, \quad g(x, y) := x^4 + y^4 - 2 = 0.$$

$$(5) f(x, y) := 6xy, \quad g(x, y) := x^2 + 2xy + 4y^2 - 4 = 0.$$

$$(6) f(x, y) := 3x + 2y, \quad g(x, y) := x^2 + xy + y^2 - 3 = 0.$$

$$(7) f(x, y) := x^2 + xy + y^2, \quad g(x, y) := x^2 - 4xy + y^2 - 6 = 0.$$

問題 6.6. 以下の問題を条件付き極値問題を考えて解きなさい.

(1) (x_0, y_0) から直線 $ax + by + c = 0$ までの最短距離を求めなさい.

(2) 放物線 $y = x^2$ と $(0, 1)$ との最短距離を求めなさい.

(3) $x^2 - xy + y^2 = 1$ と $x^2 + 2xy + 4y^2 = a$ とが共有点を持つような a の範囲を求めなさい.

(4) $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8$ と $x^2 + 4xy + y^2 = a$ とが共有点を持つような a の範囲を求めなさい.

(5) $x > 0, y > 0, xy = a^2 (a > 0)$ のとき $f(x, y) := x + y$ の最小値を求めなさい.

(6) $p > 1, q > 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ となる実数とする. $x > 0, y > 0, xy = a^2 (a > 0)$ のとき

$f(x, y) := \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$ の最小値を求めなさい (これにより Young の不等式が証明できる).

応用問題

問題 6.7. 次の関数の極値を求めなさい.

$$(1) f(x, y) := \frac{3x + 4y + 5}{x^2 + y^2 + 1} \quad (2) f(x, y) := xye^{-x^2-2y^2} \quad (3) f(x, y) := (x^2 - y)(6 - x^2 - 2y^2)$$

問題 6.8. x, y, z はすべて 0 以上の実数で, $3x + 2y + z = 36$ の関係がある. 以下の問に答えよ.

- (1) $xy + yz + zx$ の最大値および最小値を求めなさい.
- (2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ の最小値を求めなさい.
- (3) $p > 0$ に対して $x^p + y^p + z^p$ の最大値および最小値を求めなさい.
- (4) $p > 0, q > 0$ に対して $x^p y^q z^{p+q}$ の最大値を求めなさい.

問題 6.9. $a > 0, b > 0$ とし, $A(a, 0), B(0, b)$ とする. 次を満たす直角三角形 OAB の周および内部にある点 P を求めなさい. ただし d, d_a, d_b はそれぞれ辺 AB, 辺 OA, 辺 OB と点 P との最短距離とする.

- (1) $PO^2 + PA^2 + PB^2$ が最小になる点 P. (2) $d^2 + d_a^2 + d_b^2$ が最小になる点 P.
- (3) $dd_a d_b$ が最大になる点 P. (4) $d + d_a + d_b$ が最小になる点 P と最大になる点 P.

問題 6.10. $a > 0, b > 0$ とし, $A(0, a), B(b, 0), C(-b, 0)$ とする. 次を満たす二等辺三角形 ABC の周および内部にある点 P を求めなさい. ただし d_a, d_b, d_c はそれぞれ辺 BC, 辺 CA, 辺 AB と点 P との最短距離とする.

- (1) $PA^2 + PB^2 + PC^2$ が最小になる点 P. (2) $d_a^2 + d_b^2 + d_c^2$ が最小になる点 P.
- (3) $d_a d_b d_c$ が最大になる点 P. (4) $d_a + d_b + d_c$ が最小になる点 P と最大になる点 P.

問題 6.11. A を $M \times N$ 行列とする. $\|A\|_{\text{op}} := \sup\{\|Ax\|; \|x\| = 1\}$ を A の作用素ノルムという. 以下の行列に対して, 作用素ノルムを求めよ. ヒント: $g(x) := \|x\|^2 - 1 = 0$ の下での $f(x) := \|Ax\|^2$ の極値問題を考える.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 6.12. 次の曲線 C と点 P との最短距離を求めなさい.

- (1) $C: x^2 - 4xy + y^2 - 4 = 0, P(0, 0).$ (2) $C: x^2 - 2xy - 3y^2 - 1 = 0, P(0, 0).$
- (3) $C: x^2 - xy + y^2 - 3x - 3y - 7 = 0, P(1, 1).$ (4) $C: x^3 - 3xy + y^3 = 0, P(3, 3).$

問題 6.13. $AB = 3, BC = 4, CD = 4, DA = 3$ となる四角形 ABCD で面積最大なものの面積を求めなさい.