7 Fréchet 微分

Fréchet 微分

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon,a)>0;\ \|x-a\|<\delta$$
$$\Rightarrow \|f(x)-f(a)-\underline{Df(a)}(x-a)\|\le\varepsilon\|x-a\|.$$

Gâteaux 微分 (方向微分)

$$df(a;u)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tu)-f(a)}{t}$$

問題 7.1. 定義に従って $f(x,y,z):=xyz$ および $g(x,y):=x^3y^2$ が全ての点で Fréchet 微分可能であることを示せ (因数分解の問題). さらに, 微分係数を求めなさい.

問題 7.2. 次で与えられる関数が $\mathbb{R}^N$ の各点で Fréchet 微分可能であることを示し, その微分係数を求めなさい.

(1) A を N 次対称行列, $b\in\mathbb{R}^N$ とするとき, $f(x):={}^t\!xAx+2\,{}^t\!b\,x$ と表される関数 $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$.

(2) $f(x):=\|x\|^2x$ と表される関数 $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$.

ちょっとした注意. $f(x)$ が C^1 級であれば Fréchet 微分可能であり, 微分係数 Df は偏微分係数を用いて表せる. なお, 勾配ベクトルと並べ方が違うので注意せよ.

$$Df(x)=\begin{pmatrix} f_{x_1}(x) & f_{x_2}(x) & \cdots & f_{x_N}(x)\end{pmatrix}\ :\text{行ベクトル},\quad \nabla f(x)=\begin{pmatrix} f_{x_1}(x)\\ f_{x_2}(x)\\ \vdots\\ f_{x_N}(x)\end{pmatrix}\ :\text{列ベクトル}.$$

問題 7.3. 次の関数に対して, 以下の問に答えよ.

$$f(x,y):=\begin{cases}\dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(1)! $(0,0)$ で連続であることを示せ.

(2) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ.

(3)! $(0,0)$ で Gâteaux 微分可能であることを示せ.

(4) $(0,0)$ で Fréchet 微分不可能であることを示せ.

問題 7.4. $f,g:A\to\mathbb{R}^N$ は $a\in\mathbb{R}^M$ で Fréchet 微分可能とする. このとき $F(x):=(f(x),g(x))$ (内積) は $a\in\mathbb{R}^M$ で Fréchet 微分可能であることを示し, 微分係数を求めなさい.

問題 7.5. $f:A(\subset\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}$ が C^2 級とする. このとき ∇f は Fréchet 微分可能であり, 微分係数が Hesse 行列 $(f_{x_ix_j}(x))_{ij}$ となることを示しなさい.

問題 7.6. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ は C^2 級とする. $g(x):=f(r)$ $(r:=\|x\|)$ に対して以下の問に答えなさい.

(1) $Dg(x)x=rf'(r)$ を示せ.

(2) $\Delta g(x)=g_{x_1x_1}(x)+g_{x_2x_2}(x)+\cdots+g_{x_Nx_N}(x)$ に対して $\Delta g(x)=f''(r)+\dfrac{N-1}{r}f'(r)$ を示せ.

(3) $\Delta g(x)=0$ となるような関数 f を求めなさい.

問題 7.7. 次の関係式で定まる写像 $f:(x,y)\mapsto(u,v)$ に対して Jacobi 行列と Jacobian を求めなさい.

(1) $u=e^x\cos y,\ v=e^x\sin y.$ (2) $u=\dfrac{x}{y},\ v=x-y.$ (3) $u=x^3-3xy^2,\ v=3x^2y-y^3.$

(4) $u=\log(x^2+y^2),\ v=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}.$ (5) $u=xe^{xy},\ v=ye^{xy}.$ (6) $u=\dfrac{3x}{2x+3y},\ v=\dfrac{2y}{2x+3y}.$

問題 7.8. 次の座標変換に対して Jacobian を求めなさい.

(1) 2 次元極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ に対し $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$.

(2) 3 次元極座標 $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ に対し $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$.

(3) 円柱座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = h$ に対し $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,h)}$.

(4) 球面による反転 $x = \dfrac{Ru}{u^2+v^2+w^2}$, $y = \dfrac{Rv}{u^2+v^2+w^2}$, $z = \dfrac{Rw}{u^2+v^2+w^2}$ に対し $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

問題 7.9. 次の関係式で定まる写像 $f : (x,y) \mapsto (u,v)$ に対して P の近傍で C^1 級の逆写像が存在するか調べよ. 存在する場合はその微分係数 $Df^{-1}(f(P))$ を求めよ.

(1) $u = 2x + 3\sin y,\ v = xy,\quad \mathrm{P}(1,0).$
(2) $u = x^3 - 3xy,\ v = xy^2,\quad \mathrm{P}(1,1).$
(3) $u = x\sin y,\ v = y\cos x,\quad \mathrm{P}(0,0).$
(4) $u = x^4 - 4xy^2,\ v = 6x^2y - y^3,\quad \mathrm{P}(1,1).$
(5) $u = xe^{xy},\ v = ye^{-xy},\quad \mathrm{P}(-1,1).$
(6) $u = x^2 - y^3,\ v = y^3 + x^2,\quad \mathrm{P}(1,-1).$

問題 7.10. 次の関係式で定まる写像 $f : (x,y) \mapsto (u,v)$ の逆写像について微分係数 $Df^{-1}(u,v)$ を x, y の式で表せ.

(1) $u = x^3 - 3xy + y^3,\ v = x^3 - y^3.$
(2) $u = e^{-3xy},\ v = \log(x^2+y^2).$
(3) $u = \cos(x^2 - 3xy),\ v = \sin(y^2 + 3xy).$
(4) $u = \tan^{-1}\dfrac{y}{x},\ v = \log(x^2 - xy + y^2).$

問題 7.11. $f, g : O(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ で C^1 級であり, 停留点がないとする. 更に $f_x = g_y$, $f_y = -g_x$ とする. このとき $\xi = f(x,y)$, $\eta = g(x,y)$ によって C^1 級関数 $x = u(\xi,\eta)$, $y = v(\xi,\eta)$ が定まり, $u_\xi = v_\eta$, $u_\eta = -v_\xi$ となることを示しなさい.

問題 7.12. 次の関係式で定まる写像 $F : (x,y) \mapsto (u,v)$ に対し微分係数 $DF(x,y)$ を x, y, u, v の式で表しなさい.

(1) $x + y + u + v = 2,\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 2.$
(2) $x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 4,\ ux^2 + vy^2 + u^2y + v^2x = 4.$
(3) $xu + yv = 2,\ x + y + u + v = 2.$
(4) $(x+v)(y+u) = 4,\ xy(u+v) + uv = 3.$

問題 7.13. $f, g : O(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ で C^1 級とする. $f(x,y) + g(u,v) = 0$, $g(x,y) - f(u,v) = 0$ で定まる写像 $F : (x,y) \mapsto (u,v)$ がある近傍で一意に存在する条件を与え, 微分係数 $DF(x,y)$ を x, y, u, v の式で表しなさい.

問題 7.14. 次の関係式で定まる写像 $F : (x,y,z) \mapsto (u,v)$ に対し微分係数 $DF(x,y,z)$ を x, y, z, u, v の式で表しなさい.

(1) $x + y + z + u + v = 3,\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = 5.$
(2) $xyz + uv = 2,\ yu + zv + x = 0.$