

8 重積分–累次積分と縦線型領域

問題 8.1. 次の重積分を計算せよ.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \iint_{[0,2] \times [0,3]} xy(x-y) \, dx dy. & (2) \quad & \iint_{[0,2] \times [0,1]} xe^{-xy} \, dx dy. \\ (3) \quad & \iint_{[0,2] \times [1,2]} \frac{e^{xy}}{y} \, dx dy. & (4) \quad & \iint_{[1,\sqrt{3}] \times [0,\sqrt{3}]} \frac{3+y^2}{1+x^2} \, dx dy. \end{aligned}$$

問題 8.2.¹ $C[a, b]$ における Cauchy-Schwarz の不等式

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx \leq \left(\int_a^b f(x)^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g(x)^2 \, dx \right)^{1/2}$$

を次の式を展開することにより示せ: $\iint_{[a,b] \times [a,b]} |f(x)g(y) - f(y)g(x)|^2 \, dx dy$. 別の方法も検討せよ.

問題 8.3. 次の重積分を計算せよ.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \iint_D xy \, dx dy, \quad D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq y \leq 2\}. \\ (2) \quad & \iint_D (2x + 6y) \, dx dy, \quad D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 3x + y \leq 12\}. \\ (3) \quad & \iint_D xy \, dx dy, \quad D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq y \leq 2\sqrt{5x - x^2}\}. \\ (4) \quad & \iint_D xy \, dx dy, \quad D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq y \leq 2\sqrt{x}\}. \\ (5) \quad & \iint_D (3x + y) \, dx dy, \quad D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x \leq 4y - y^2\}. \end{aligned}$$

問題 8.4. $f(x, y)$ は $D := [a, b] \times [a, b]$ で連続とする. 次を示せ.

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(x, y) = f(y, x) \text{ ならば } \iint_D f(x, y) \, dx dy = 2 \int_a^b \left(\int_a^x f(x, y) \, dy \right) dx. \\ (2) \quad & f(y, x) = -f(x, y) \text{ ならば } \iint_D f(x, y) \, dx dy = 0. \end{aligned}$$

問題 8.5. 次の累次積分の積分順序を変更せよ.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_0^2 \left(\int_x^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) \, dy \right) dx. & (2) \quad & \int_1^2 \left(\int_1^{\frac{1}{x}} f(x, y) \, dy \right) dx. \\ (3) \quad & \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx. & (4) \quad & \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) \, dy \right) dx. \end{aligned}$$

問題 8.6. $f(x)$ は $[a, b]$ で連続とする. 次を示せ.

$$\begin{aligned} (2) \quad & \int_a^x \left(\int_a^t f(s) \, ds \right) dt = \int_a^x (x-s)f(s) \, ds. \\ (n) \quad & \int_a^x \left[\int_a^{x_{n-1}} \cdots \left(\int_a^{x_1} f(s) \, ds \right) \cdots dx_{n-2} \right] dx_{n-1} = \int_a^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) \, ds. \end{aligned}$$

問題 8.7. 積分順序を変更することによって, 次の累次積分の計算をなさい.

$$(1) \quad \int_0^4 \left(\int_x^4 e^{y^2} \, dy \right) dx \quad (2) \quad \int_1^3 \left(\int_{\frac{3}{y}}^3 xe^{xy} \, dx \right) dy \quad (3) \quad \int_0^8 \left(\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \sqrt{2+y^4} \, dy \right) dx$$

応用問題

積分記号下の微分. $f(x, y)$ は $[a, b] \times [c, d]$ で連続であり, $f_x(x, y)$ が存在し $[a, b] \times [c, d]$ で連続とする. このとき

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d f_x(x, y) dy.$$

広義積分になる場合にはもう少し条件が必要になる.

問題 8.8. 不定積分の基本公式と積分記号下の微分に基づいて, 次の不定積分を求めなさい (積分定数は省略してある).

(1) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$ に注意して $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$ を求めなさい.

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a}$ に注意して $\int \frac{dx}{(\sqrt{a^2 - x^2})^3}$ を求めなさい.

問題 8.9. $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2}$ に注意し, 積分記号下の微分を用いることで以下の広義積分の値を求めなさい.

(1) $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos bx dx \ (a > 0, b \in \mathbb{R}).$ (2) $\int_0^\infty x e^{-ax} \sin bx dx \ (a > 0, b \in \mathbb{R}).$

広義重積分. 非負関数 $f(x, y)$ が D で発散するような点があったり, D が非有界のときには次を満たす有界閉集合の族 $\{D_n\}_n$ を考える (近似増加列・取尽くし列):

$D_n \subset D_{n+1} \subset D$ であり, 任意の D に含まれる有界閉集合 A に対し $A \subset D_n$ となる番号 n がある.

このとき, D 上の広義重積分は次のように定義される (D_n の選び方には依らない):

$$\iint_D f(x, y) dx dy := \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy.$$

なお $f(x, y)$ が非負とは限らない場合には厳密には正の部分と負の部分で分けて考える必要があるが $|f(x, y)|$ に対し上の極限值が存在する場合には問題なく計算できる.

問題 8.10. 次の広義重積分を計算しなさい.

(1) $\iint_{[0,2] \times [0,2]} \frac{dx dy}{\sqrt[3]{x+y}}.$ (2) $\iint_D \frac{dx dy}{x+y}, \quad D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}.$
 (3) $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{xy}}, \quad D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}.$
 (4) $\iint_{x \geq 0, y \geq 0} \frac{dx dy}{(1+x+y)^4}.$ (5) $\iint_D \frac{dx dy}{(1+x+y)^3}, \quad D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, 0 \leq y \leq x\}.$
 (6) $\iint_D e^{-2x-3y} dx dy, \quad D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, 0 \leq y \leq 2x\}.$
 (7) $\iint_D xy dx dy, \quad D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, 0 \leq y \leq \frac{2}{1+x^2}\}.$

問題 8.11. 広義重積分 $\iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ が収束しないことを次の 3 種類の近似列 $\{A_n\}_n, \{B_n\}_n, \{C_n\}_n$ で計算することで示しなさい. $A_n := [\frac{1}{n}, 1] \times [0, 1], B_n := [0, 1] \times [\frac{1}{n}, 1], C_n := [\frac{1}{n}, 1] \times [\frac{1}{n}, 1].$ ヒント: $\left(\frac{-x}{x^2 + y^2}\right)_x = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$