9　変数変換の公式

問題 9.1. 次の重積分を変数変換を用いて計算しなさい.

(1) $\displaystyle\iint_D e^{x+y}\sin(x-y)\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;0\le x-y\le\pi,0\le x+y\le 3\}.$

(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;0\le x-2y\le 2,2\le 3x-y\le 6\}.$

問題 9.2. 次の重積分を極座標変換を用いて計算しなさい.

(1) $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2\le 16\}.$

(2) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;4\le x^2+y^2\le 16,0\le y\le\sqrt{3}x\}.$

(3) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;1\le x^2+y^2\le 9,-x\le y\le x\}.$

(4) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x\ge 0,x^2+y^2\le 4y\}.$

(5) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{16-x^2-y^2}},\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;y\ge 0,(x-2)^2+y^2\le 16\}.$

問題 9.3. 適当な変数変換を用いて次の重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;0<y\le x^2\le 4y,0<x\le y^2\le 4x\}.$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+3y)\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;1\le\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 4\}.$

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;1\le xy\le 4,x\le y\le 2x\}.$

曲面積

曲面 S が $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ と表されるとき, S の曲面積は

$$|S|=\iint_D\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\,dxdy.$$

一般に媒介変数表示されている場合 $S=\{x\in\mathbb{R}^3;x=f(u,v),(u,v)\in D\}$ には

$$|S|=\iint_D\|f_u(u,v)\times f_v(u,v)\|_2\,dxdy.$$

ただし $a={}^t(a_1,a_2,a_3)$, $b={}^t(b_1,b_2,b_3)$ に対し $a\times b={}^t\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right).$

体積

立体 A が $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;f(x,y)\le z\le g(x,y),(x,y)\in D\}$ と表されるとき, A の体積は

$$|A|=\iiint_A dxdydz=\iint_D\{g(x,y)-f(x,y)\}\,dxdy.$$

問題 9.4. 半径 $R>0$ の球 $(x^2+y^2+z^2 \le R^2)$ に対し, 表面積が $4\pi R^2$, 体積が $\dfrac{4}{3}\pi R^3$ であることを重積分を用いて示せ.

問題 9.5. 次の曲面に対する曲面積を重積分を用いて求めなさい.

(1) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \quad D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; (x-1)^2+y^2\le 1\}$.

(2) $z=x^2+y^2, \quad D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; (x-1)^2+y^2\le 1\}$.

(3) $z=xy, \quad D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\le 4\}$.

問題 9.6. 次の立体に対する体積を重積分を用いて求めなさい.

(1) $z=x^2+y^2$, $z=0$ および $x^2+(y-2)^2=4$ とで囲まれる部分の体積.

(2) $z=6-3\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$ および $(x-1)^2+y^2=1$ とで囲まれる部分の体積.

(3) $x^2+y^2=a^2$ と $y^2+z^2=a^2$ とで囲まれる部分の体積.

問題 9.7. $a>b>0$ とする. 中心が $(a,0)$, 半径が b の円が xy 座標平面にある. これを y 軸のまわりに 1 回転してできる曲面を考える.

(1) この曲面で囲まれる立体 (ドーナッツ) の体積を求めなさい.

(2) 曲面積を求めなさい.

重心

密度が一定である立体図形 D の重心座標 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ は

$$\overline{x}=\frac{1}{|D|}\iiint_D x\,dxdydz,\ \overline{y}=\frac{1}{|D|}\iiint_D y\,dxdydz,\ \overline{z}=\frac{1}{|D|}\iiint_D z\,dxdydz.$$

ただし $|D|=\iiint_D dxdydz$. 密度が $\rho(x,y,z)$ である立体の質量は $\iiint_D \rho(x,y,z)\,dxdydz$.

問題 9.8. 次の密度一様な立体の重心座標を求めなさい.

(1) $D:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x+2x+3y\le 12\}$.

(2) $D:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2+z^2\le 1\}$.

(3) $D:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2\le 4, x^2+y^2\le 2x\}$.

(4) $D:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; 0\le z\le 6-2\sqrt{x^2+y^2}\}$.