

1 ベクトル解析履修のための復習

次の各問ができない学生は、ベクトル解析を履修することは勧めない。

問 1.1. 次の媒介変数表示された曲線を図示せよ。始点と終点を明記すること。

$$(1) x = t, y = t^2 - 2t \quad (0 \leq t \leq 3).$$

$$(2) x = 2 \cos t, y = 2 \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

問 1.2. 次の関数を微分しなさい。

$$(1) f(x) = x \cos x.$$

$$(2) f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

問 1.3. 次の定積分を計算しなさい。

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, dx$$

$$(2) \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} \, dx$$

問 1.4. 次の 2 変数関数を偏微分しなさい ($f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ を求めなさい)。

$$(1) f(x, y) = 5x^3y^2 - 3x^2y^5.$$

$$(2) f(x, y) = \cos(x^2y^3).$$

問 1.5. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ の $(1, -2, 2)$ における接平面の方程式を求めなさい。

問 1.6. 次の 2 重積分を計算しなさい。

$$(1) \iint_D x \cos y \, dx dy, \quad D: 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \iint_D (x^2 + y^3) \, dx dy, \quad D: 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2.$$

$$(3) \iint_D (5x^2y - 3y^2) \, dx dy, \quad D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x.$$

$$(4) \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx dy, \quad D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0. \quad \text{ヒント: 極座標変換.}$$

問 1.7. 空間上に A, B, C および P の 4 点があるとする。以下の各文の \square に当てはまる用語および式を答えなさい。

(1) A, B, C の 3 点を結んで三角形が作れるとき、 \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} は \square といえる。

(2) (1) の条件の下で、P が三角形 ABC と同一平面上にあるための条件は、 $\overrightarrow{AP} = \square$ と書けることである。

(3) (2) の条件の下で、P が三角形 ABC の内部及び周上にあるための条件は、(2) で用いた 2 つのパラメーターが \square となることである。

問 1.8. $\overrightarrow{OA} = [2, 1, -1]$, $\overrightarrow{OB} = [1, 1, 0]$ とする。次の各問いに答えなさい。

(1) \overrightarrow{OA} の長さを求めなさい。

(2) \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} とがなす角を求めなさい。

問 1.9. 次の行列式を計算しなさい。

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x & y \end{vmatrix}$$

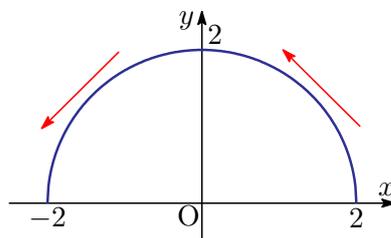
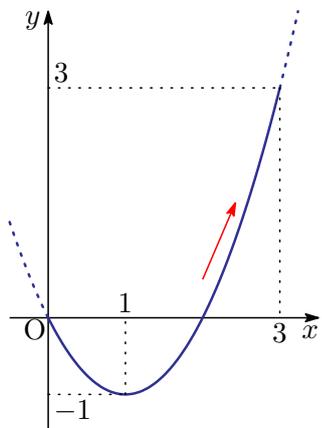
$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

問 1.10. $x = 2 \sin u \cos v$, $y = 2 \sin u \sin v$, $z = 2 \cos u$ とする。 $x^2 + y^2 + z^2$ を計算し、簡単な形にしなさい。

解答 (略解)

問 1.1. 左から (1) (2) の順.

(1) は $y = x^2 - 2x$ の $0 \leq x \leq 3$ の部分で, 始点 $(0, 0)$, 終点 $(3, 3)$.(2) は $x^2 + y^2 = 4$ の $-2 \leq x \leq 2, y \geq 0$ の部分で, 始点 $(2, 0)$, 終点 $(-2, 0)$.

問 1.2.

(1) $f'(x) = \cos x - x \sin x$.

(2) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

問 1.3.

(1) $\frac{1}{4}$.

(2) $\frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$.

問 1.4.

(1) $f_x = 15x^2y^2 - 6xy^5, f_y = 10x^3y - 15x^2y^4$.

(2) $f_x = -2xy^3 \sin(x^2y^3), f_y = -3x^2y^2 \sin(x^2y^3)$.

問 1.5. $z = -\frac{1}{2}x + y + \frac{9}{2}$.

問 1.6.

(1) $2\sqrt{3}$.

(2) 30.

(3) 32.

(4) 12.

問 1.7. (1) 1 次独立 (線形独立). (2) $s\vec{AB} + t\vec{AC}$. (3) $s \geq 0, t \geq 0, s + t \leq 1$.問 1.8. (1) $\sqrt{6}$. (2) $\frac{\pi}{6}$ (30°)

問 1.9.

(1) $-4x + 3y$.

(2) -14 .

(3) $-7x + 7y + 7z$.

問 1.10. 4. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に注意せよ.