

微分積分 1(微分) 自習スライド (Part 1)

微分可能性

鈴木 敏行

神奈川大学

2023 年 03 月 01 日

※ 転載や再配布を禁止する.

<http://t21suzuki.html.xdomain.jp/>

「微分すること」について考える.

物体の平均の速さは, 次のように求められる.

$$\text{平均の速さ} = \frac{\text{進んだ道のり}}{\text{進むのにかかった時間}}.$$

特に, x 秒のときに $f(x)$ の位置にいる場合, a 秒から b 秒までに移動した物体の平均の速さは

$$\frac{\text{進んだ道のり}}{\text{進むのにかかった時間}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

しかし、物体が移動するのに、常に同じスピードであるとは限らない。
だからこそ瞬間の速さが計算したい。

a 秒での瞬間の速さは $\frac{f(a) - f(a)}{a - a}$???

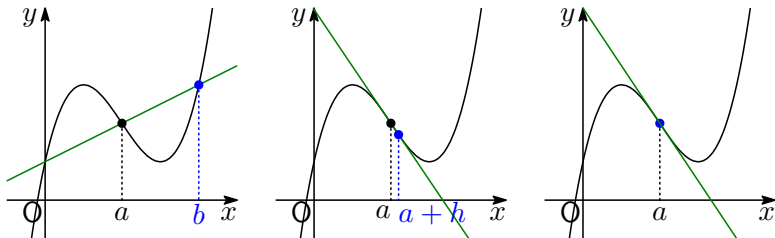
そこで、 a 秒から一瞬経った $a + h$ 秒までの平均の速さを考えてみよう。

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

h は一瞬を表す量であり、できれば 0 にすごく近い方がいい。
かといって 0 になってはいけない。まるでチキンレース？

そこで、 h を 0 に近づけたときの $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ が限りなく近づく量を
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ と表そう。

以上の話を関数 $y = f(x)$ のグラフに対して焼きなおしてみる.



$y = f(x)$ のグラフがあったときに $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ は 2 点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を通る直線の傾き (変化の割合) である.

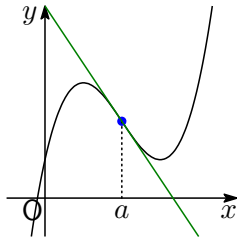
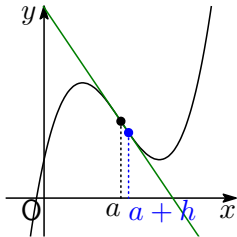
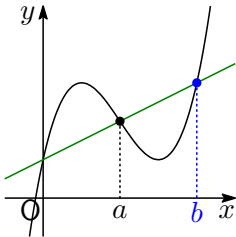
傾き具合は常に変わるため, $(a, f(a))$ でのちょうど傾き具合を知りたい.
 だからといって $\frac{f(a) - f(a)}{a - a}$ は計算できない.

そこで, $(a, f(a))$ からちょっとずれた $(a+h, f(a+h))$ との直線を考える.
 その傾きは $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

h はちょっとを表す量であり, できれば 0 にすごく近い方がいい. かといって 0 になってはいけない.

h を 0 に近づけたときの $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が限りなく近づく量

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ を考える必要がある.



いきなり記号として出てきた $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ であるが、
この $\lim$ についてまとめておこう.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ の定義は ... ???

感覚的には...

x が a にならないように a に近づくときに $f(x)$ が限りなく b に近づく
(チキンレース).

厳密な定義は... (この定義を理解しておく必要はない)

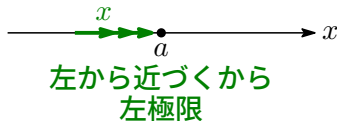
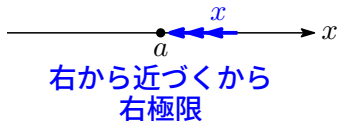
すべての $\varepsilon > 0$ に対して,

$$0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

となるような $\delta(\varepsilon) > 0$ がある.

なお, $x > a$ のまま $x \rightarrow a$ を考える **右極限** $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ と
 $x < a$ のまま $x \rightarrow a$ を考える **左極限** $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ もある.

右極限・**左極限** を総称して**片側極限**という.



関数 $f(x)$ に対して, 極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ を**微分係数**という.

$x = a$ における微分係数が有限値で定まるとき, $x = a$ で**微分可能**という.

微分可能であるとは、 $(a, f(a))$ における接線が存在することを意味する。
接線というのは直感的には接している直線であるが、厳密には

$y = f(x)$ を $(a, f(a))$ で直線に近似したもの。

$y = f(x)$ の $(a, f(a))$ における接線の方程式は $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ 。

$f(a)$ と $f(a+h)$ の差 $f(a+h) - f(a)$ を $f(x)$ の差分という。

h が充分小さいとき (微小なもの), $h = dx$ と表すことにする。

$df(a) = f(a+dx) - f(a)$ だが、これが $f'(a) dx$ とほとんど同じである。

微小なものを扱っているのだから、誤差はさらに非常に小さい。

そのため、誤差を無視して $df(a) = f'(a) dx$ と表せるのである。

この $df(a)$ が微小な差分ということで微分という。

$f(x)$ の微分を x の微小差 dx で表すときに出てくる係数 $f'(a)$ だから
微分係数というのである。

さて、関数 $f(x)$ というのは a から $f(a)$ への対応になっている。

関数 $y = f(x)$

1つのデータ x を入れたときに、1つのデータ y が返ってくる仕組み。

微分係数の計算ができたので、当然 a から $f'(a)$ への対応を考えてもよい。
このようにして、関数 $f(x)$ から新たな関数 $f'(x)$ が導出される。
この $f'(x)$ を $f(x)$ の導関数という。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

$y = f(x)$ の導関数を表すのに、次のような記号が用いられる。

- y' , $f'(x)$ (ラグランジュ);
- $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}(x)$ $\frac{df(x)}{dx}$ (ライプニッツ);
- $\dot{y}$, $\dot{f}(x)$ (ニュートン);
- Dy , $Df(x)$ (オイラー).

微分係数を求める作業と、導関数を求める作業は実質同じである。

ここまで理論で突き通していたので、具体的な関数の導関数を考える。

例 1.1. $f(x) = ax + b$

$f(x + h) = a(x + h) + b = ax + b + ah$ なので,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a = a.$$

例 1.2. $f(x) = cx^2$

$f(x + h) = c(x + h)^2 = c(x^2 + 2xh + h^2)$ なので,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x^2 + 2xh + h^2) - cx^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(2xh + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ch(2x + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} c(2x + h) = 2cx. \end{aligned}$$

連続の定義

$f(x)$ が $x = a$ で連続とは, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ を満たすことをいう.

極限值が存在し, $x = a$ で定義されていて, その2つの値が一致する, という3要件が成立していないとダメ.

定義域の端点では, 極限值は片側極限で充分とする.

グラフでいえば, 途切れず繋がっているということ.

注意: 関数の連続性に対する用語として **連続である** とはいうが, **連続する** とは言わない!!

連続だからといって微分可能とは限らない.

例 1.3. $f(x) = |x|$

$x = 0$ での微分係数を考える. 定義から $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |0|}{h}$.

もし, $h > 0$ のとき, $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} 1 = 1$.

また, $h < 0$ のとき, $\lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} -1 = -1$.

右極限と左極限が一致しないから, 元の極限值は存在しない.

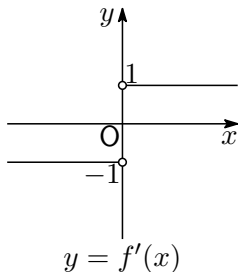
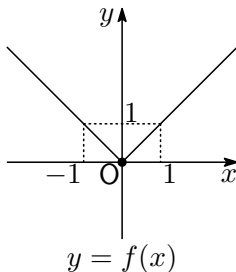
つまり, $x = 0$ で微分可能ではない.

しかし, $x = 0$ で連続である.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x \leq 0. \end{cases}$$

$f(x) = |x|$ に対し

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$



実は, すべての点 x で連続であるのに, すべての点 x で微分可能ではないという恐ろしい関数もある.

気になる人は[高木関数](#)で検索してみるとよい.

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(2^n x)}{2^n}, \quad d(x) = \max\{|x - n|; n \text{ は整数} \}.$$

一方, 微分可能であれば連続である.

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能だから, 極限值 $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在する. ここで,

$$f(a+h) = [f(a+h) - f(a)] + f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times h + f(a).$$

したがって, 極限値の性質を用いると,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times h + f(a) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} h + \lim_{h \rightarrow 0} f(a) \\ &= f'(a) \times 0 + f(a) = f(a). \end{aligned}$$

$h = x - a$ とすれば, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. ゆえに, $x = a$ で連続である.

おまけ: 片側微分と片側連続

極限值に右極限と左極限とがあったので, 微分係数や導関数についても同じようなものを考えることができる.

$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在することを **右微分可能** であるとい
い, 右極限の値を **右微分係数** という.

$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在することを **左微分可能** であるとい
い, 左極限の値を **左微分係数** という.

右微分・**左微分**を総称して**片側微分**という.

a から $f'_+(a)$ への対応 $f'_+(x)$ を **右導関数** といい,

a から $f'_-(a)$ への対応 $f'_-(x)$ を **左導関数** という.

右微分可能かつ左微分可能であり, その両者の片側微分係数が一致するとき, 通常の意味での微分可能であるといえる.

例 1.4. $f(x) = |x|$

$f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1$ である (これらは計算済み).
したがって, $f'(0)$ は存在しない.

連続性についても右・左というのがある.

- $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ を満たすとき, 右連続という.
- $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$ を満たすとき, 左連続という.

右微分可能であれば右連続, 左微分可能であれば左連続である.